

Partie 1 : Compression JPEG d'une image 2×2

On part de l'image suivante avec $X = \begin{pmatrix} R \\ V \\ B \end{pmatrix}$:

$X_1 = \begin{pmatrix} 154 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix}$	$X_2 = \begin{pmatrix} 105 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix}$
$X_3 = \begin{pmatrix} 250 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$	$X_4 = \begin{pmatrix} 240 \\ 240 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 154 & 105 \\ 250 & 240 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 255 \\ 30 & 240 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 255 & 0 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Transformation des couleurs

Pour chaque vecteur X on calcule le vecteur :

$$Y = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,16874 & -0,33126 & 0,5 \\ 0,5 & -0,41869 & -0,08131 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ V \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} = TX + S$$

On obtient : $Y_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$, $Y_3 = \begin{pmatrix} 94 \\ 85 \\ 238 \end{pmatrix}$ et $Y_4 = \begin{pmatrix} 212 \\ 8 \\ 147 \end{pmatrix}$.

On en déduit les matrices : $\tilde{L} = \begin{pmatrix} 94 & 212 \\ 85 & 8 \end{pmatrix}$, $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 85 & 8 \end{pmatrix}$ et $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 238 & 147 \end{pmatrix}$.

Étape 2 : Sous-échantillonnage des matrices $\tilde{M}$ et $\tilde{N}$

Puisqu'il y a peu de nombres et qu'ils sont très hétérogènes, nous garderont les matrices $\tilde{M}$ et $\tilde{N}$ intactes.

Étape 3 : Transformation en Cosinus Discrète (TCD) de la matrice $\tilde{L}$

On calcule $TCD(\tilde{L}) = A^{-1} \times \tilde{L} \times A$ où $a_{ij} = \alpha(j) \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{2N} \times (2i-1)\right)$
pour $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq N$ avec $\alpha(j) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & \text{si } j = 1 \\ \sqrt{2/N} & \text{sinon} \end{cases}$

Ici, $N = 2$ donc $A =$

Alors $A^t = \dots$ et $A \times A^t =$

$$TCD(\tilde{L}) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

Étape 4 : Quantification

On divise chaque coefficient tcd_{ij} par $1 + k(i+j-1)$ et on arrondit à l'entier le plus proche.

avec un facteur $k = 4$:	avec un facteur $k = 25$:
$Q(\tilde{L}) =$	$Q(\tilde{L}) =$
Au départ : 12 valeurs de R, V et B Au final : ... valeurs de L, M et N non nulles	Au départ : 12 valeurs de R, V et B Au final : ... valeurs de L, M et N non nulles

Partie 2 : Décompression de la matrice $Q(\tilde{L})$

Étape 4 : Quantification inverse

avec un facteur $k = 4$:	avec un facteur $k = 25$:
$TCD(\tilde{L}') = \begin{pmatrix} 56 \times 5 & -12 \times 9 \\ -3 \times 9 & 0 \times 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 & -108 \\ -27 & 0 \end{pmatrix}$	$TCD(\tilde{L}') =$

Étape 3 : TCD inverse

Si $TCD(\tilde{L}) = A^{-1} \times \tilde{L} \times A$ alors : $\tilde{L} =$

$\tilde{L}' = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 280 & -108 \\ -27 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc : $\tilde{L}' = \begin{pmatrix} 72 & 180 \\ 99 & 207 \end{pmatrix}$	$\tilde{L}' = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times (\quad) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc : $\tilde{L}' =$
--	---

Étape 2 : Sur-échantillonnage

Inutile, on retrouve les matrices $\tilde{M}$ et $\tilde{N}$. Alors :

$$Y_1' = \begin{pmatrix} 72 \\ 229 \\ 184 \end{pmatrix}, Y_2' = \begin{pmatrix} 180 \\ 25 \\ 73 \end{pmatrix}, Y_3' = \begin{pmatrix} 99 \\ 85 \\ 238 \end{pmatrix}, Y_4' = \begin{pmatrix} 207 \\ 8 \\ 147 \end{pmatrix} \quad \left| \quad Y_1' = \begin{pmatrix} 229 \\ 184 \end{pmatrix}, Y_2' = \begin{pmatrix} 25 \\ 73 \end{pmatrix}, Y_3' = \begin{pmatrix} 85 \\ 238 \end{pmatrix}, Y_4' = \begin{pmatrix} 8 \\ 147 \end{pmatrix}.$$

Étape 1 : Transformation de couleurs

Si $Y = TX + S$ alors : $X =$

$X_1' = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$X_2' = \begin{pmatrix} 102 \\ 254 \\ 0 \end{pmatrix}$
$X_3' = \begin{pmatrix} 253 \\ 35 \\ 22 \end{pmatrix}$	$X_4' = \begin{pmatrix} 233 \\ 234 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_1' = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$X_2' = \begin{pmatrix} 116 \\ 255 \\ 11 \end{pmatrix}$
$X_3' = \begin{pmatrix} 255 \\ 28 \\ 15 \end{pmatrix}$	$X_4' = \begin{pmatrix} 220 \\ 221 \\ 0 \end{pmatrix}$

Complément : Interprétation de $TCD(\tilde{L})$ dans le cas 2×2

Si $\tilde{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors : $TCD(\tilde{L}) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$