Formation d'une couche de glace à la surface d'un lac (partie maths)

I- Approche par les suites après la résolution numérique à l'aide d'un tableur

On note h_n l'épaisseur de glace (en m) formée au bout de n secondes. Alors $h_0 = 0$.

D'après la formule écrite sur tableur : $\boxed{h_{n+1} \approx h_n + \frac{\alpha(T_e - T_a)K}{L\rho(\alpha h_n + K)} \text{ pour tout } n.}$

Sur tableur, on peut facilement vérifier que la suite (h_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.
On pense alors à utiliser une suite annexe.

On pose : $\boxed{\boldsymbol{v_n = h_n + \frac{K}{\alpha} = h_n + v_0}}$ pour tout entier n (v_n est de même dimension que h_n).

On a : $v_{n+1} = h_{n+1} + v_0 = h_n + \frac{\alpha(T_e - T_a)K}{L\rho(\alpha h_n + K)} + v_0$ donc $v_{n+1} = v_n + \frac{(T_e - T_a)K}{L\rho v_n}$ pour tout $n \geq 0$.

On étudie donc la suite (v_n) définie par $\boxed{\boldsymbol{v_0 = \frac{K}{\alpha} \text{ et } v_{n+1} = v_n + \frac{a}{v_n} \text{ pour } n \geq 0}}$ avec $a = \frac{(T_e - T_a)K}{L\rho} \approx 1{,}4.10^{-7}$.

Sur tableur la suite semble "presque" constante. Elle n'est pourtant ni arithmétique, ni géométrique.

Méthode 1 : recherche uniquement de la limite

La suite (v_n) est strictement croissante sur N ($v_{n+1} - v_n > 0$ pour tout n).
Elle n'a donc que deux options : diverger vers $+\infty$ ou converger vers une limite finie x.

Si on suppose qu'elle converge, x vérifie l'équation : $x = x + \frac{a}{x}$ qui en fait n'admet pas de solution ($\frac{a}{x} \neq 0$).
On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Comme $h_n = v_n - \frac{K}{\alpha}$ pour tout entier n, on aura aussi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} h_n = +\infty}$.

Méthode 2 : recherche d'une formule dépendant de *n*

On pose $\boxed{\boldsymbol{u_n = v_n^2}}$ pour tout n.

On a : $u_{n+1} = v_{n+1}^2 = (v_n + \frac{a}{v_n})^2 = v_n{}^2 + 2a + \frac{a^2}{v_n{}^2}$ pour tout entire n.

Avec : $v_n{}^2 \approx 2.10^{-3}$ et $2a = \frac{2(T_e - T_a)K}{L\rho} \approx 3.10^{-7}$ et $\frac{a^2}{v_n{}^2} = \frac{(T_e - T_a)^2 K^2}{L^2 \rho^2 v_n{}^2} \approx 10^{-11}$.

Si on néglige le dernier terme, on trouve : $u_{n+1} \approx u_n + 2a$ pour tout n
donc la suite (u_n) est "quasi" arithmétique avec $u_0 = v_0{}^2$ d'où : $\boldsymbol{u_n \approx v_0{}^2 + 2an}$ pour tout n.

Alors : $v_n{}^2 = (h_n + v_0)^2 \approx v_0{}^2 + 2an = v'_n{}^2$ pour tout n

donc $h_n \approx \sqrt{v_0{}^2 + 2an} - v_0 = v_0\left(\sqrt{1 + ns} - 1\right)$ si on pose $s = \frac{2a}{v_0{}^2}$ (avec $h_n > 0$).

Vérification sur tableur : on trouve à peu près les mêmes valeurs que pour $h(t)$.

On valide donc : $\boxed{\boldsymbol{h_n \approx \frac{K}{\alpha}\left(\sqrt{1 + ns} - 1\right)}}$ pour tout entier n avec $s = \frac{2\alpha^2(T_e - T_a)}{L\rho K}$ et on trouve bien $\boxed{\lim_{n \to +\infty} h_n = +\infty}$.

Remarque pour les puristes :

En mathématiques, on néglige rarement des termes !!!

Une méthode plus rigoureuse consiste à minorer chaque terme u_n par $v_0{}^2 + nr = v'_n{}^2$ (terme de la suite arithmétique précédente) :

$v_{i+1}{}^2 = (v_i + \frac{a}{v_i})^2 = v_i{}^2 + 2a + \frac{a^2}{v_i{}^2} > v_i{}^2 + 2a$ donc $v_{i+1}{}^2 - v_i{}^2 > 2a$ pour tout entier i.

En additionnant toutes les inégalités pour i allant de 0 à $n - 1$ (principe du télescopage), on obtient :

$v_n{}^2 - v_0{}^2 > 2an$ d'où : $\boldsymbol{v_n{}^2 > 2an + v_0{}^2}$ pour tout entier $n \geq 0$ (on reconnaît : $\boldsymbol{u_n > v'_n{}^2}$ pour tout n).

On obtient : $v_n > \sqrt{2an + v_0{}^2}$ (car $v_n > 0$) avec $v_n = h_n + v_0$ pour tout entier $n \geq 0$.

Donc $h_n > \sqrt{2an + v_0{}^2} - v_0 = v_0\left(\sqrt{sn+1} - 1\right)$ si on pose $s = \frac{2a}{v_0{}^2} = \frac{2\alpha^2(T_e - T_a)}{L\rho K}$.

La limite du membre de droite vaut $+\infty$ donc on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = +\infty$.

Erreur commise par l'approximation de $u_n = v_n{}^2$ par $v'_n{}^2$:

$\varepsilon_n = a^2 \times \sum\limits_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{v_i{}^2}$ avec $0 < \frac{1}{v_i{}^2} < \frac{1}{2ai + v_0{}^2} < \frac{1}{2ai}$ pour $i \geq 1$.

Alors $0 < \varepsilon_n < \frac{a^2}{v_0{}^2} + \frac{a}{2} \times \sum\limits_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{i} < \frac{a^2}{v_0{}^2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \times \ln(n-1)$ car $\frac{1}{i} < \ln i - \ln(i-1)$ pour $i \geq 2$.

Prenons $n = 10^6$: le membre de droite vaut environ 10^{-6} donc l'erreur sur $v_n{}^2$ est minime (avec $v_n{}^2 \approx 2.10^{-3}$).
Pour $n = 3600$: l'erreur sur $v_{3600}{}^2$ est inférieure à 7.10^{-7}.

II- Modèle continu

Préambule :

On a montré que $\frac{dh}{dt}(t) = \frac{\alpha(T_e - T_a)K}{L\rho(\alpha h(t) + K)}$ avec $\frac{dh}{dt}(t) = \frac{h(t+dt) - h(t)}{dt}$ taux d'accroissement entre t et $t + dt$.

Si on passe à la limite quand dt tend vers 0, on obtient : $h'(t) = \frac{\alpha(T_e - T_a)K}{L\rho(\alpha h(t) + K)}$.
On cherche donc une fonction h dérivable sur $[0 ; +\infty[$ qui vérifie cette condition, avec $h(0) = 0$.

Méthode 1 :

On reprend la formule trouvée avec les suites où n était le nombre de secondes écoulées donc $n = t$.

Alors $h(t) = \frac{K}{\alpha}\left(\sqrt{1 + st} - 1\right)$ pour $t \geq 0$ avec $s = \frac{2\alpha^2(T_e - T_a)}{L\rho K}$.

Cette fonction est bien dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on peut montrer qu'elle vérifie la condition sur la dérivée et $h(0) = 0$.

Méthode 2 : par recherche de primitive

On cherche une fonction h dérivable sur $[0 ; +\infty[$ telle que $(\alpha h(t) + K)\, h'(t) = \frac{\alpha(T_e - T_a)K}{L\rho}$

soit $2\alpha h'(t)\times(\alpha h(t) + K) = \frac{2\alpha^2(T_e - T_a)K}{L\rho}$.

On reconnaît la forme $2u'(t)\times u(t)$ qui est la dérivée de $u^2(t)$ alors : $(u^2(t))' = \frac{2\alpha^2(T_e - T_a)K}{L\rho}$ pour tout $t \geq 0$.

Or, les seules fonctions dont la dérivée est constante sont les fonctions affines.

On en déduit que $u^2(t) = (\alpha h(t) + K)^2 = \frac{2\alpha^2(T_e - T_a)K}{L\rho} \times t + C$.

Or, pour $t = 0$, $h(0) = 0$ donc : $K^2 = C$.

On a alors : $(\alpha h(t) + K)^2 = \frac{2\alpha^2(T_e - T_a)K}{L\rho} \times t + K^2 = K^2 \left(\frac{2\alpha^2(T_e - T_a)}{L\rho K} \times t + 1\right) = K^2(1 + st)$.

On retrouve bien alors : $h(t) = \frac{K}{\alpha}\left(\sqrt{1+st} - 1\right)$ pour $t \geq 0$ avec $s = \frac{2\alpha^2(T_e - T_a)}{L\rho K}$.

Dernière remarque pour les puristes :

Le modèle continu confirme totalement l'approximation faite dans la première partie avec les suites.

En fait, pour ce type de fonction qui vérifie une équation différentielle du type $y\,y' = a$ la méthode d'Euler conduit à une suite du type $v_{n+1} = v_n + \frac{a}{v_n}$, l'erreur commise alors dans l'approximation de ${v_n}^2$ par ${v'_n}^2$ correspond exactement à celle commise par la méthode d'Euler !

III- Etude des fonctions

Fonction *h*

$h'(t) > 0$ avec $T_e > T_a$ donc la fonction h est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

De plus on montre facilement par composition que $\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$ car $s > 0$.

Fonction T_0

$$T_0(t) = \frac{KT_e + \alpha T_a h(t)}{\alpha h(t) + K} = \frac{KT_e + T_a K(\sqrt{1+st} - 1)}{K(\sqrt{1+st} - 1) + K} = \frac{KT_e - KT_a + KT_a\sqrt{1+st}}{K\sqrt{1+st}} = \frac{T_e - T_a}{\sqrt{1+st}} + T_a \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Comme $s > 0$, la fonction affine : $t \to 1 + st$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$,
par composition la fonction : $t \to \sqrt{1+st}$ est croissante
et la fonction : $t \to \frac{1}{\sqrt{1+st}}$ est décroissante.
Comme $T_e > T_a$ alors la fonction : $t \to \frac{T_e - T_a}{\sqrt{1+st}}$ est aussi décroissante.

On en déduit que la fonction T_0 est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

De plus, comme $\lim_{t\to+\infty} \sqrt{1+st} = +\infty$ (car $s > 0$), alors $\lim_{t\to+\infty} T_0(t) = T_a$.