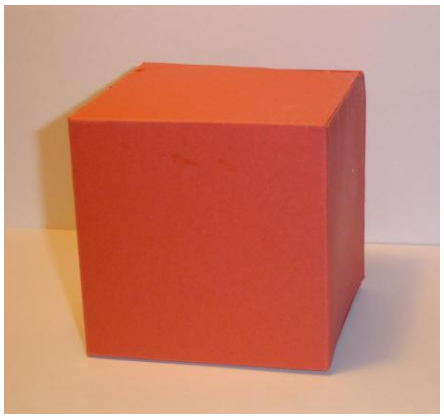
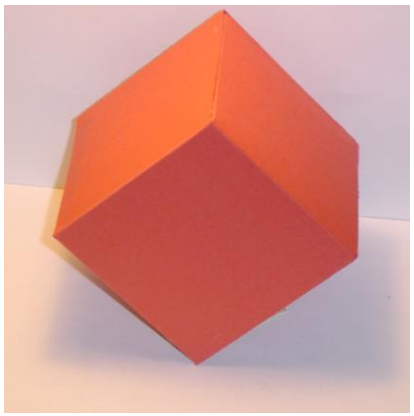
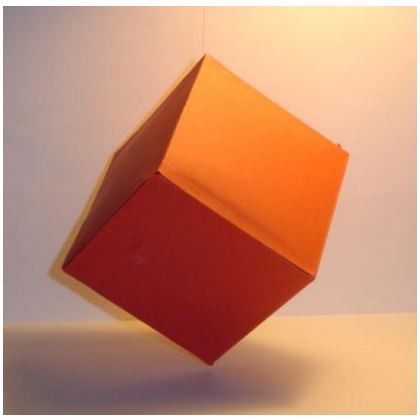
IREM de Besançon

Le cube dans tous ses états

Le solide
Ses représentations
Des configurations associées
Des fonctions associées

Groupe lycée

Les auteurs

Françoise de La Bachelerie, professeure agrégée de mathématiques au lycée Duhamel de Dole, est animatrice à l'Irem de Franche-Comté où elle est responsable du groupe « Liaison mathématiques-sciences physiques au lycée ». Elle participe également au groupe « Lycée ». Elle a participé à la commission inter-Irem « second cycle ».

Michel Magnenet, professeur agrégé de mathématiques honoraire est animateur à l'Irem de Franche-Comté où il met ses disponibilités au service des groupes « Liaison mathématiques-sciences physiques au lycée », « Lycée » et « Rallye Mathématique de Franche-Comté ».

Daniel Parent, professeur agrégé de mathématiques au lycée Hyacinthe Friant de Poligny. Il est animateur à l'Irem de Franche-Comté, participe au groupe « Lycée » dont il a eu la responsabilité.

Alain Parmentelat, professeur agrégé de mathématiques au lycée Hyacinthe Friant de Poligny. Il est animateur à l'Irem de Franche-Comté, participe au groupe « Lycée » dont il a la responsabilité, ainsi qu'au groupe « Rallye Mathématique de Franche-Comté ».

Philippe Speyer-Pays, professeur certifié de mathématiques au lycée Jean-Michel de Lons-le-Saunier. Il est animateur à l'Irem de Franche-Comté, participe au groupe « Lycée » dont il a eu la responsabilité.

Avec la participation de **Philippe Biétry** professeur certifié de mathématiques au lycée Pasteur de Besançon, pour la réalisation de l'activité « de la position α à la position γ »

Introduction

Cette brochure est écrite par les membres du groupe Lycée de l'IREM de Franche-Comté, à destination des professeurs de mathématiques des lycées d'enseignement général et technologique.
Le point de départ de cette étude est celle d'un objet simple de l'espace : le cube.

Considérant cet objet de l'espace successivement comme « cube fil de fer » (ensemble des 12 arêtes), « cube creux » (surface cubique) et « cube plein », les notions de lignes et surfaces de niveau ont été à l'origine de notre réflexion.

Dans l'espace, le cube peut occuper différentes positions ; nous étudions plus spécialement trois d'entre elles :
1 : l'une de ses faces est horizontale ;
2 : deux arêtes opposées parallèles sont dans un même plan horizontal ;
3 : une grande diagonale est verticale ;

Nous proposons une représentation en perspective cavalière, que nous présentons par ailleurs en annexe 1, du cube dans chacune de ses positions, puis nous étudions l'intersection de celui-ci avec une famille de plans horizontaux.

Le cube et ces plans déterminent des polygones, des surfaces, des polyèdres, auxquels nous associons des fonctions.
L'étude mathématique de ces différentes étapes est développée en utilisant des démonstrations qui nous semblent accessibles aux élèves des classes de la seconde à la terminale des lycées d'enseignements généraux et technologiques. Dans la partie « annexes », nous proposons plusieurs activités différenciées pour les élèves (au moins une par position du cube) que nous avons expérimentées.

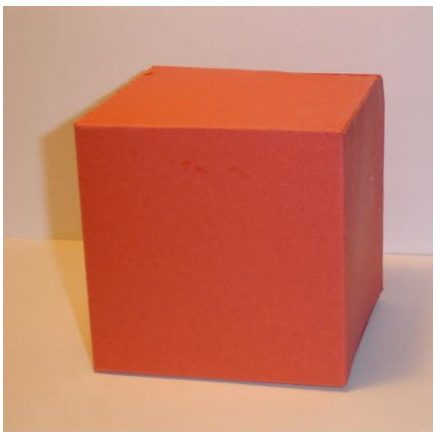
L'enseignant, en fonction des objectifs visés, pourra faire travailler ses classes sur les thématiques suivantes :
1- Etude de propriétés géométriques et métriques de configurations simples associées au cube.
2- Représentation en perspective cavalière de figures de l'espace.
3- Calculs de longueur, d'aire, de volume.
4- Problèmes liés au remplissage du cube, construction de jauge.
5- Etude de fonctions numériques définies sur un intervalle non arbitraire, mais lié à une situation.
6- Représentations graphiques, découverte de propriétés de celles-ci.

Présentation

Outre le problème de représentation du cube dans différentes positions, le remplissage du cube soulève des questions de lignes et de surfaces de niveau, de volume en fonction de la hauteur de liquide contenu, de jauge, ….
Dans toute la brochure, l'arête du cube sera de longueur *a*.

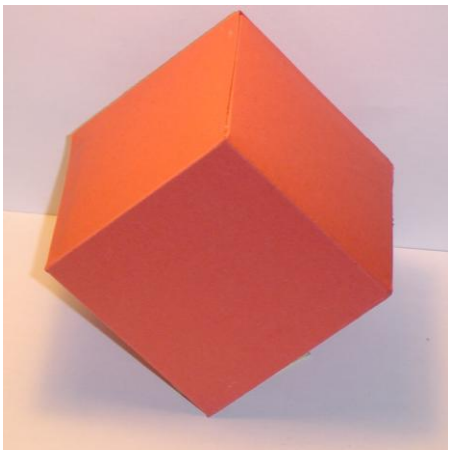
Quelques positions du cube :

Position α (classique) : une des faces du cube est posée sur un plan horizontal, une autre est dans le plan frontal.



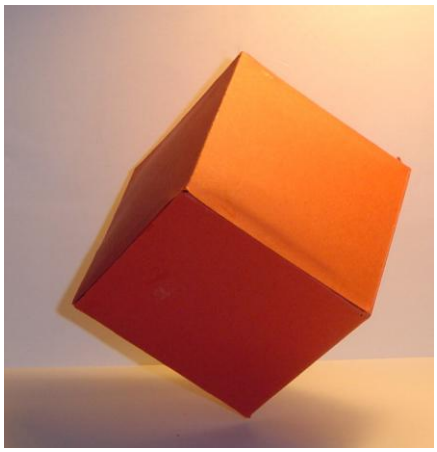
Position α

Position β : le cube est posé sur une arête contenue dans un plan horizontal et une diagonale de la face frontale est verticale.



Position β

Position γ : une des diagonales du cube est verticale.



Position γ

Sommaire

Première partie : le cube en position alpha

I. Représentation en perspective cavalière du cube en position α..... 8

II. Lignes, surfaces de niveau et solides associés 8

1) Lignes de niveau..... 9
2) Surfaces de niveau 10
3) Solides associés 11

III. Fonctions associées 12

1) Longueur des lignes de niveau..... 12
2) Aire des surfaces de niveau 12
3) Volume des solides associés 13

Deuxième partie : le cube en position bêta

I. Représentation en perspective cavalière du cube en position β..... 15

II. Lignes de niveau, surfaces de niveau et solides associés 16

1) Lignes de niveau..... 16
2) Surfaces de niveau 18
3) Solides associés..... 18
4) Complément : projection orthogonale d'une ligne de niveau..... 19

III. Fonctions associées 20

1) Longueur des lignes de niveau..... 20
2) Aire des surfaces de niveau..... 22
3) Volume des solides associés 24
4) Jauge 26
5) Remplissage..... 31

Troisième partie : le cube en position gamma

I. Représentation en perspective cavalière du cube en position γ 37

1) Propriétés du cube utilisées dans ce paragraphe 37
2) Construction du cube en position γ 37

II. Lignes et surfaces de niveau 40

1) Lignes de niveau 40
2) Surfaces de niveau 42

III. Fonctions associées 43

1) Longueur des lignes de niveau 43
2) Aire des surfaces de niveau 44
3) Volume des solides associés 46

Quatrième partie : annexes

I. Représentations en perspective cavalière 54

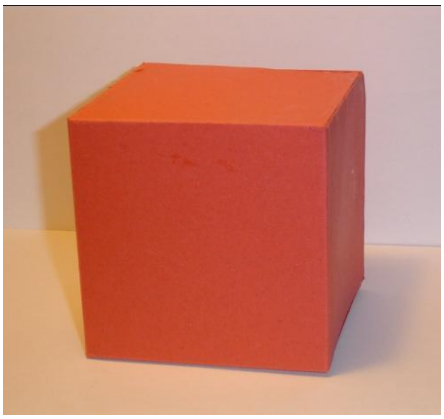
1) La perspective cavalière 55
2) Variante de la position α 56
3) Variante de la position γ 59
4) De la position α à la position γ 61

II. Activités commentées 66

1) Cube en position α : fonctions et géométrie de l'espace 66
2) De la position α à la position β 68
3) Cube en position β 69
4) De la position α à la position γ 73

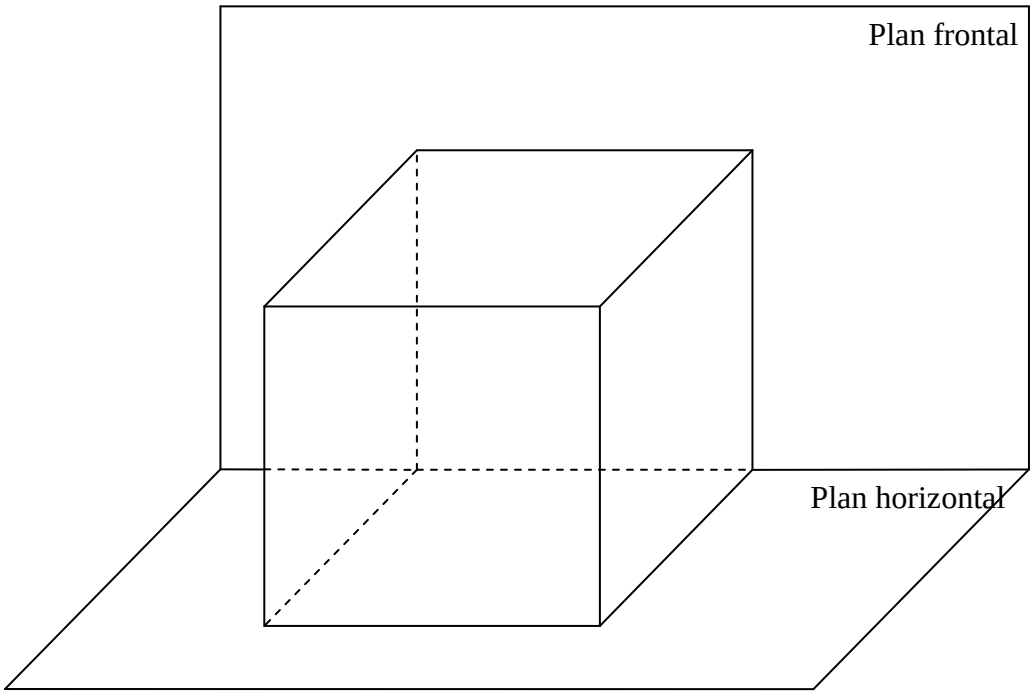
Première Partie

Le cube en position alpha

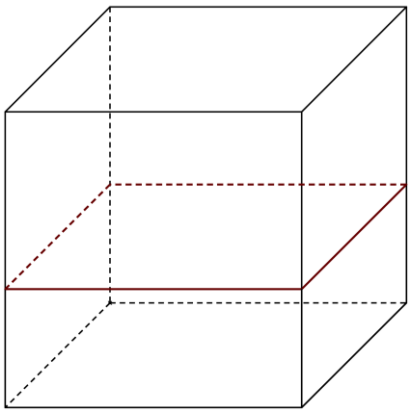


I. Représentation en perspective cavalière du cube en position α

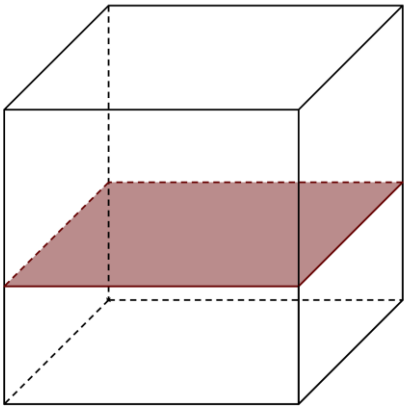
Dans cette position, une des faces du cube est dans le plan horizontal.
Le cube est dessiné en perspective cavalière. Nous avons choisi l'une des faces du cube comme plan frontal.
Ainsi, les plans frontal et horizontal sont perpendiculaires et leur droite d'intersection est une des arêtes du cube.
Nous rappelons que le réel positif *a* désigne la longueur de l'arête du cube.



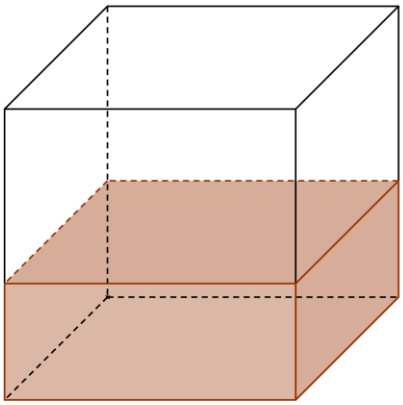
II. Lignes, surfaces de niveau et solides associés



Ligne



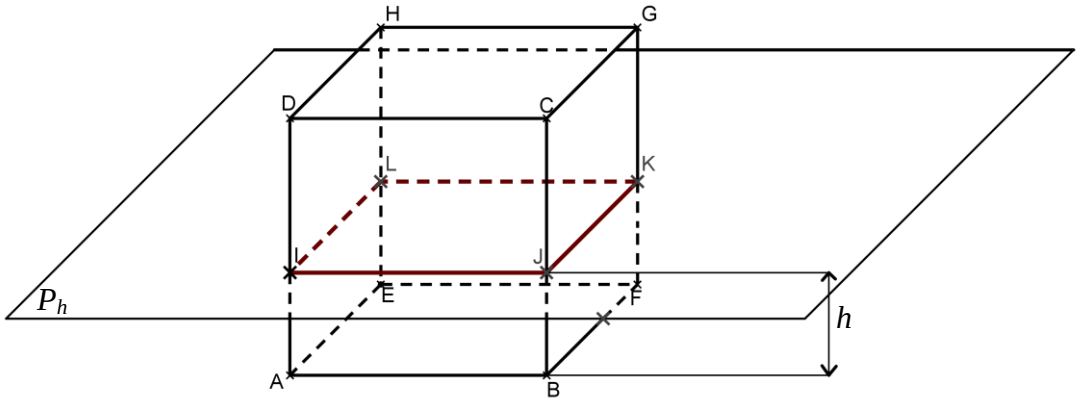
Surface



Solide associé

1) Lignes de niveau

Désignons par (Σ) la surface constituée des six carrés « pleins » du cube « creux ».
Les lignes de niveau considérées sont les sections de (Σ) par une famille de plans horizontaux notés P_h, h étant un réel de l'intervalle [0 ; a].
On note L_h la ligne de niveau de cote h.



Démonstration attendue de la part d'un élève de Seconde.
Déterminer une ligne de niveau L_h , c'est déterminer l'intersection de (Σ) avec P_h, h étant un réel appartenant à l'intervalle [0 ; a]

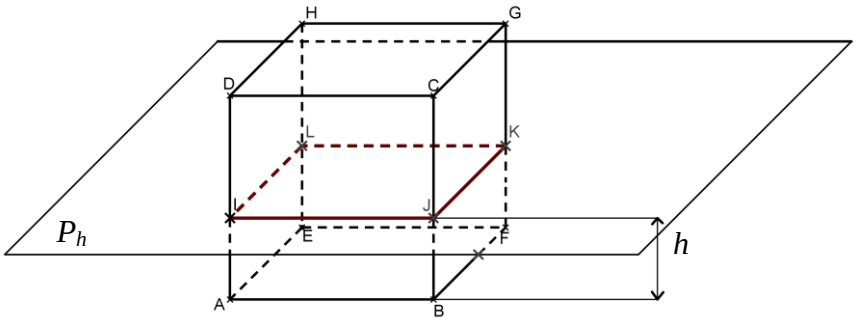
Le plan P_h coupe les plans parallèles (ABCD) et (EFGH) suivant deux droites parallèles (IJ) et (KL).
Le plan P_h coupe les plans parallèles (AEHD) et (BFGC) suivant deux droites parallèles (IL) et (JK).
Par conséquent, IJKL est un ***parallélogramme*.**

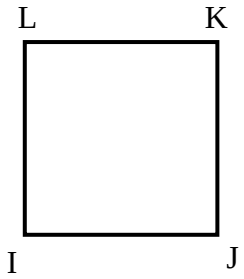
Le plan (ABCD) coupe les plans parallèles (ABFE) et P_h suivant deux droites parallèles (AB) et (IJ).
Le plan (BFGC) coupe les plans parallèles (ABFE) et P_h suivant deux droites parallèles (BF) et (JK).
Les droites (AB) et (BF) étant perpendiculaires, il en est de même des droites (IJ) et (JK) :
IJKL est alors un ***rectangle***.

Les droites (AB) et (IJ) ainsi que les droites (AI) et (BJ) étant parallèles, ABJI est un parallélogramme, donc AB = IJ.
Les droites (BF) et (JK) ainsi que les droites (KF) et (BJ) étant parallèles, BFKJ est un parallélogramme, donc JK = BF
Or BF = AB, on en déduit alors que IJ = JK.

En conclusion, IJKL est un ***carré*** dont le côté est l'arête de longueur a du cube.

Les lignes de niveau sont des carrés dont les côtés ont pour longueur *a*



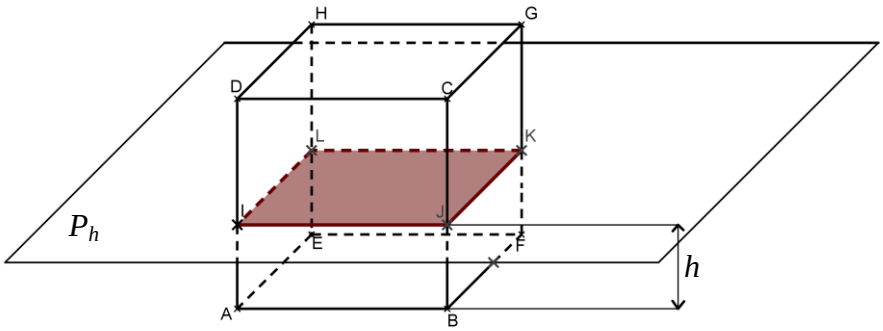


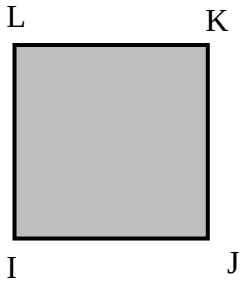
Ligne de niveau en vraie grandeur

2) Surfaces de niveau

Les surfaces de niveau considérées sont les sections du cube plein avec une famille de plans horizontaux. Dans le cas du remplissage du cube, la surface du liquide représente cette section.

Les surfaces de niveau sont des carrés pleins délimités par les lignes de niveau définies au paragraphe précédent.



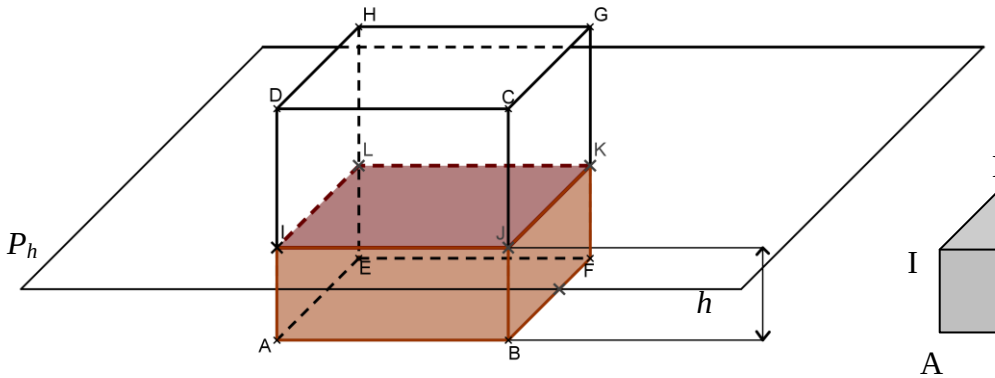


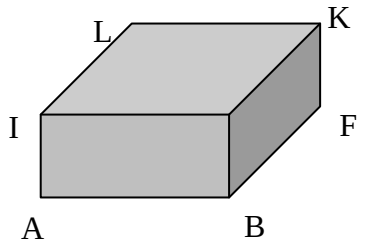
Surface de niveau en vraie grandeur

3) Solides associés

Supposons maintenant que l'on remplit le cube d'un liquide coloré jusqu'au plan P_h.
Le liquide coloré définit un parallélépipède rectangle (pavé droit) dont la section est la surface de niveau du paragraphe précédent et la hauteur le nombre *h*.

Le solide est un parallélépipède rectangle de base carrée de côté *a* et de hauteur *h*.





Vue en perspective cavalière du solide obtenu

III. Fonctions associées

Nous étudierons successivement les fonctions associées respectivement à la longueur des lignes de niveaux, à l'aire des surfaces de niveaux et au volume de liquide contenu.

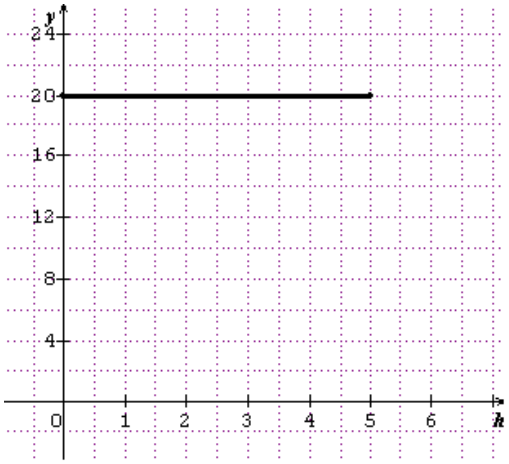
1) Longueur des lignes de niveau

La longueur des lignes de niveau L_h précédentes peut s'exprimer en fonction de la hauteur h de liquide contenu.

Notons $\mathcal{L}$ la fonction qui, à tout réel h de l'intervalle associe la longueur de la ligne de niveau L_h.

Nous obtenons alors pour tout h de [0 ; a] :

$$\mathcal{L}(h) = 4a$$



Représentation graphique avec a = 5

La fonction longueur est constante sur [0 ; a]

2) Aire des surfaces de niveau

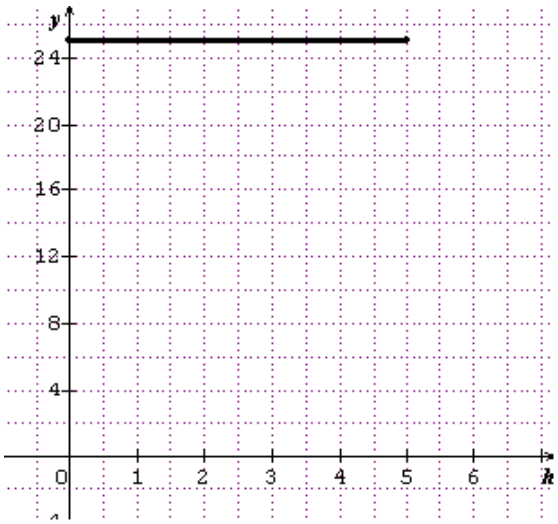
L'aire des surfaces de niveau peut aussi s'exprimer en fonction de la hauteur h de liquide contenu.

Soit S la fonction qui, à tout réel h de l'intervalle [0 ; a], associe l'aire de la surface de niveau de cote h.

Nous obtenons, pour tout h de [0 ; a]:

$$\mathcal{S}(h) = a^2$$

La fonction aire est constante sur [0 ; a]



Représentation graphique avec a = 5

3) Volume des solides associés

Exprimons le volume des solides associés au remplissage du cube en fonction de la hauteur *h* de liquide contenu.

Notons φ la fonction, qui à tout réel *h* de l'intervalle [0 ; *a*], associe le volume *v* contenu dans le cube. Il s'agit du volume d'un pavé droit de dimensions *a, a* et *h*.

Nous obtenons, pour tout *h* de [0 ; *a*]:

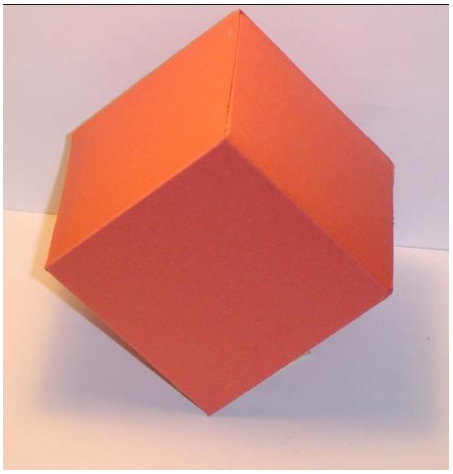
$$\varphi(h) = a^2 h$$

La fonction volume est linéaire sur [0 ; *a*]

Représentation graphique avec *a* = 5

Deuxième Partie

Le cube en position bêta

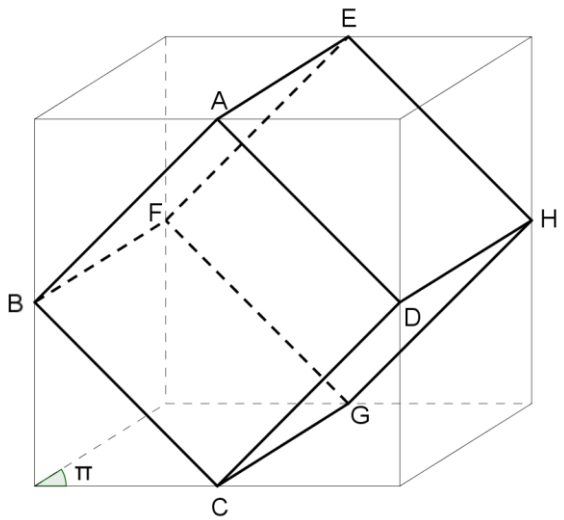


I. Représentation en perspective cavalière du cube en position β

Le plan frontal contient une face du cube dont une diagonale est verticale.
Une représentation possible de ce cube, d'arête a, est obtenue à partir de celle d'un parallélépipède rectangle dont la face située dans un plan frontal, est un carré de côté $a\sqrt{2}$, les arêtes perpendiculaires à cette face étant de longueur a.

Ainsi, le pavé droit utilisé a pour dimensions
a et $a\sqrt{2}$ (pour la base), et $a\sqrt{2}$ (pour la hauteur)
Le cube ABCDEFGH a ses arêtes de longueur a.
Les plans (AEGC) et (ABCD) sont verticaux.
Le plan (BDHF) est horizontal.

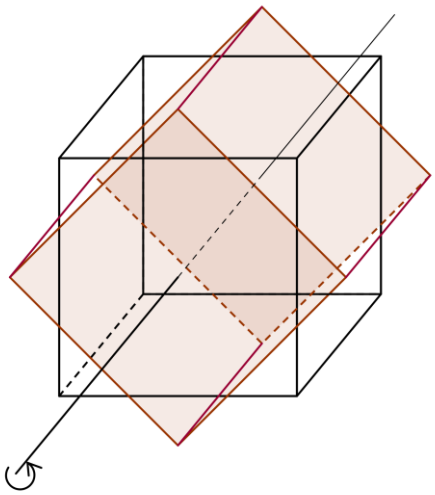
Nous noterons Π le plan horizontal contenant l'arête [CG].

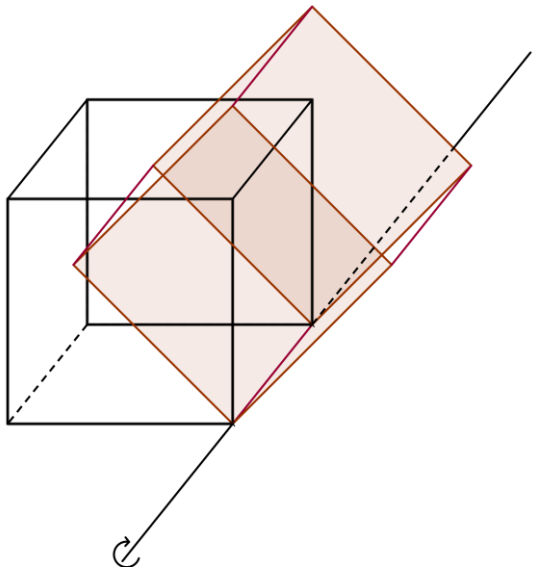


Remarque : pour obtenir cette représentation, d'autres méthodes peuvent être utilisées, par exemple en utilisant une rotation de l'espace :
– Image du cube en position α par une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour d'un axe joignant les centres de deux faces verticales opposées.

– Image du cube en position α par une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour d'un axe support d'une arête située dans un plan horizontal.

Dans l'annexe I, nous proposons une représentation du cube obtenu après rotation.



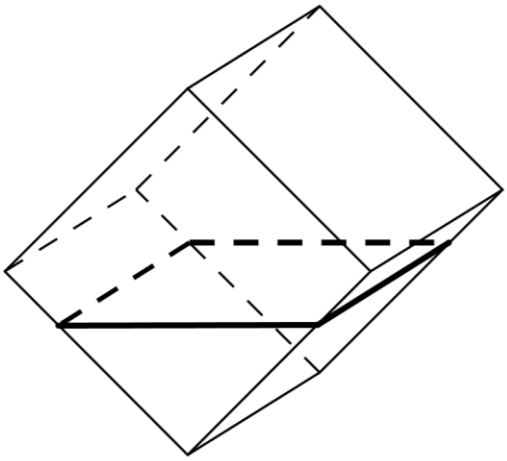


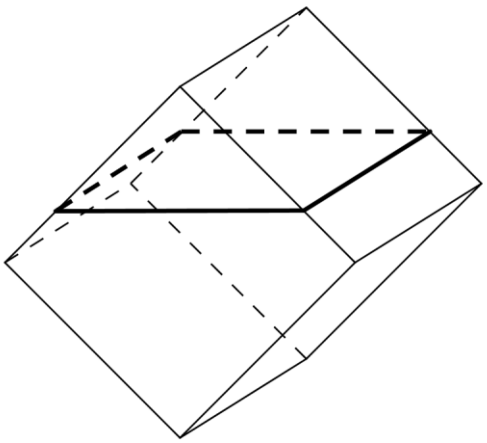
II. Lignes de niveau, surfaces de niveau et solides associés

1) Lignes de niveau

Désignons par (Σ) la surface constituée des six carrés « pleins » du cube. Soit P_h le plan horizontal situé à la distance h du plan Π, situé dans le demi-espace de frontière Π et contenant le cube ABCDEFGH.
Les lignes de niveau considérées sont les sections de (Σ) par la famille de plans horizontaux P_h, h étant un réel de l'intervalle $[0 ; \sqrt{2}]$.

On note L_h la ligne de niveau de cote h, représentée en gras sur les figures ci-dessous.



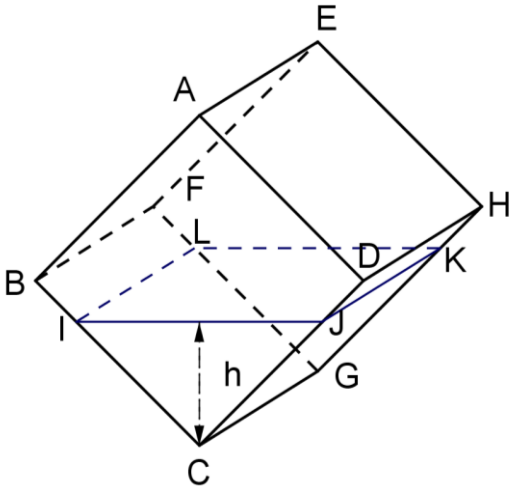


h désignant un réel appartenant à l'intervalle $\left[0 ; a\sqrt{2}\right]$,
la ligne de niveau L_h est l'intersection de (Σ) avec P_h,

- **1er cas** : si $h = 0$ alors L_0 = [CG].
- **2ème cas** : si $h \in \left]0 ; a\sqrt{2}\right[$
  alors L_h = [IJ] ∪ [JK] ∪[KL] ∪[LI].

(BDHF) est un plan horizontal
P_h et (BDHF) sont donc parallèles.
Sachant que deux plans parallèles coupent un plan suivant deux droites parallèles,
on obtient (IJ) // (BD) et (LK) // (FH).
De plus, (BD) // (FH). Il vient donc (IJ) // (LK).

De même, on obtient (IL) // (BF) et (JK) // (DH).
Comme de plus, (BF) //(DH). Il vient donc (IL) //(JK).



Représentation lorsque $h \in \left]0 ; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$

Ainsi, (IJ) // (LK) et (IL) // (JK). IJKL est alors un parallélogramme.
En outre, on a (IJ) // (BD), (IL) // (BF) et (BD) ⊥ (BF) donc on en déduit (IJ) ⊥ (IL).

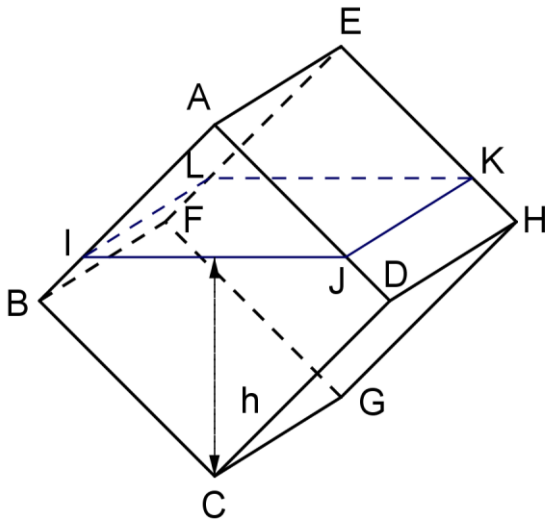
Par conséquent, IJKL est un rectangle.

Pour ce qui concerne les dimensions de ce rectangle, dans le cas où $h \in \left]0\,;\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$, JK mesure a et IJ mesure $2h$
En effet, à l'aide des angles correspondants, on montre que le triangle ICJ est rectangle isocèle en C, de hauteur h et donc IJ = $2h$. (On peut aussi exploiter le parallélisme de (IJ) et (BD) et appliquer le théorème de Thalès pour conclure)

La ligne de niveau L_h est un rectangle de dimensions a et $2h$ lorsque $h \in \left]0\,;\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$

- cas où $h \in \left]\frac{a\sqrt{2}}{2}\,;\,a\sqrt{2}\right[$,

  On montre de manière analogue que le triangle JAI est rectangle isocèle en A et IJ = $2a\sqrt{2} - 2h$.



Représentation lorsque $h \in \left]\frac{a\sqrt{2}}{2}\,;\,a\sqrt{2}\right[$

La ligne de niveau L_h est un rectangle de dimensions a et $2a\sqrt{2} - 2h$ lorsque $h \in \left]\frac{a\sqrt{2}}{2}\,;\,a\sqrt{2}\right[$

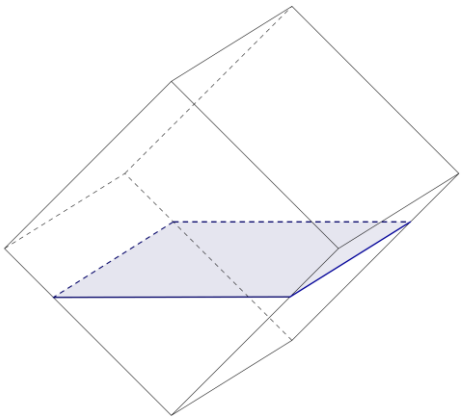
- **3ème cas** : si $h = a\sqrt{2}$ alors $L_{a\sqrt{2}}$ = [AE]

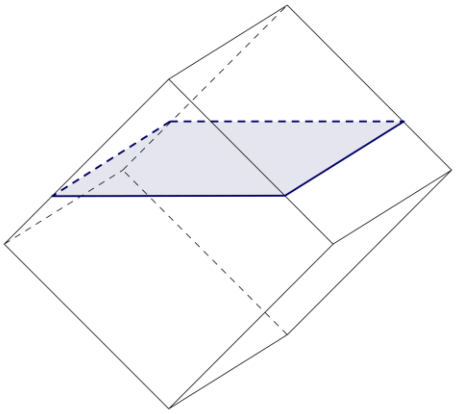
Cas particuliers :

Pour $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $L_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$ est le rectangle BDHF.
Pour $h = \frac{a}{2}$ et pour $h = a\sqrt{2} - \frac{a}{2}$, L_h est un carré de côté a.

2) Surfaces de niveau

Les surfaces de niveau considérées sont les sections du cube plein avec la famille de plans horizontaux. Elles sont délimitées par les lignes de niveau définies précédemment.





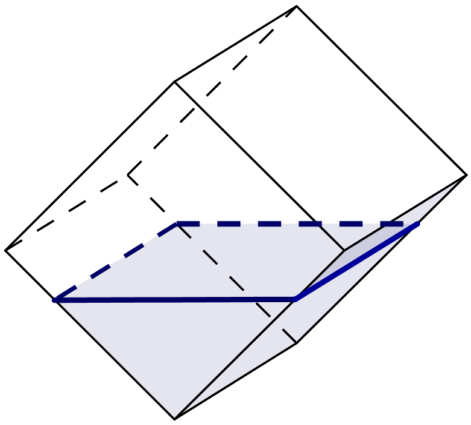
Les surfaces de niveau sont des rectangles pleins lorsque $h \in \left]0\,;a\sqrt{2}\right[$

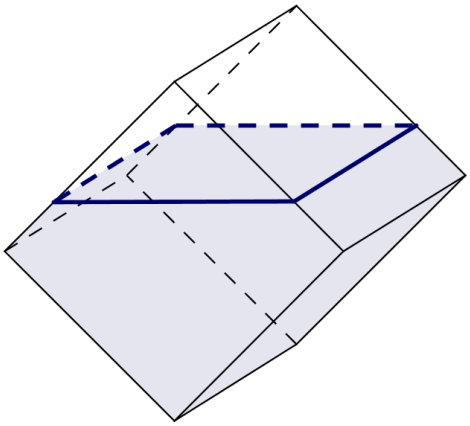
3) Solides associés

Supposons maintenant que l'on remplit le cube d'un liquide coloré jusqu'au plan P_h. Le liquide coloré définit un solide que l'on peut visualiser à l'aide des figures ci-dessus :

Lorsque $h \in \left]0\,;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$, il s'agit d'un prisme de hauteur a et de base un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse $2h$.

Lorsque $h \in \left]\frac{a\sqrt{2}}{2}\,;a\sqrt{2}\right[$, il s'agit d'un prisme à base pentagonale, ou du cube initial privé d'un prisme de hauteur a et de base un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse $2a\sqrt{2}-2h$.



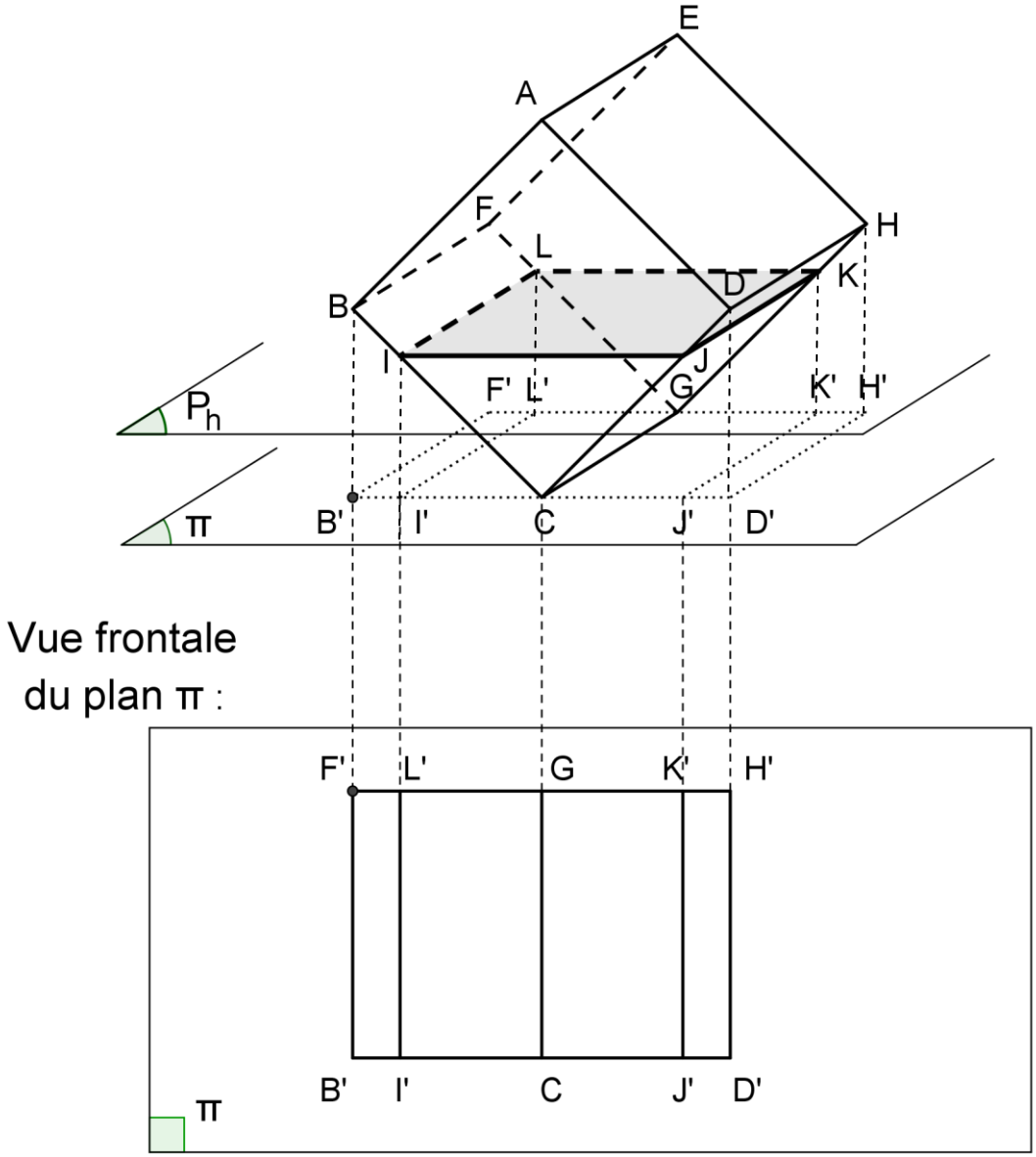


4) Complément : projection orthogonale d'une ligne de niveau

Soit p la projection orthogonale sur le plan Π .

M' = p(M) si et seulement si $\begin{cases} \text{M et M' appartiennent à la droite passant par M et orthogonale à } \Pi \text{ .} \\ \text{M' appartient à } \Pi \text{ .} \end{cases}$

On a p(A) = C ; p(C) = C ; p(G) = G et p(E) = G.
Notons B', D', H', F', I', J', K', L' les projetés respectifs sur Π de B, D, H, F, I, J, K, L.
BDHF est un rectangle de côtés a et $a\sqrt{2}$ et B'D'H'F' est un rectangle isométrique à BDHF.
IJKL est un rectangle de côtés a et $2h$ ou a et $2a\sqrt{2} - 2h$
I'J'K'L' est un rectangle isométrique à IJKL puisqu'il est projeté orthogonalement sur un plan qui lui est parallèle.



Remarquons que la représentation dans le plan Π nous donne ligne et surface de niveau en vraie grandeur.

III. Fonctions associées

Etudions respectivement les fonctions associées à la longueur des lignes de niveau, à l'aire des surfaces de niveau et au volume contenu lors du remplissage du cube en position β par un liquide coloré.

1) Longueur des lignes de niveau

La longueur de la ligne de niveau L_h peut s'exprimer en fonction de la hauteur h de liquide contenu. Soit $\mathcal{L}$ la fonction qui à h associe la longueur de la ligne de niveau matérialisée sur le cube.
Distinguons 3 cas.

- **1er cas** : si $h = 0$ ou si $h = a\sqrt{2}$
  Les lignes de niveaux correspondantes sont réduites chacune à un segment de longueur a.

Par conséquent, $\boldsymbol{\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(a\sqrt{2}) = a}$

- **2ème cas** : si $h \in]\,0\,;\frac{a\sqrt{2}}{2}]$

La ligne de niveau L_h est un rectangle de dimensions a et $2h$

Par conséquent, pour tout $h \in]\,0\,;\frac{a\sqrt{2}}{2}]$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(h) = 4h + 2\,a}$$

En particulier, $\mathcal{L}(\frac{a\sqrt{2}}{2})=2(1+\sqrt{2})\,a$

- **3ème cas** : si $h \in [\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\,;\ a\sqrt{2}\,[$

La ligne de niveau L_h est un rectangle de dimensions a et $2a\sqrt{2}-2h$

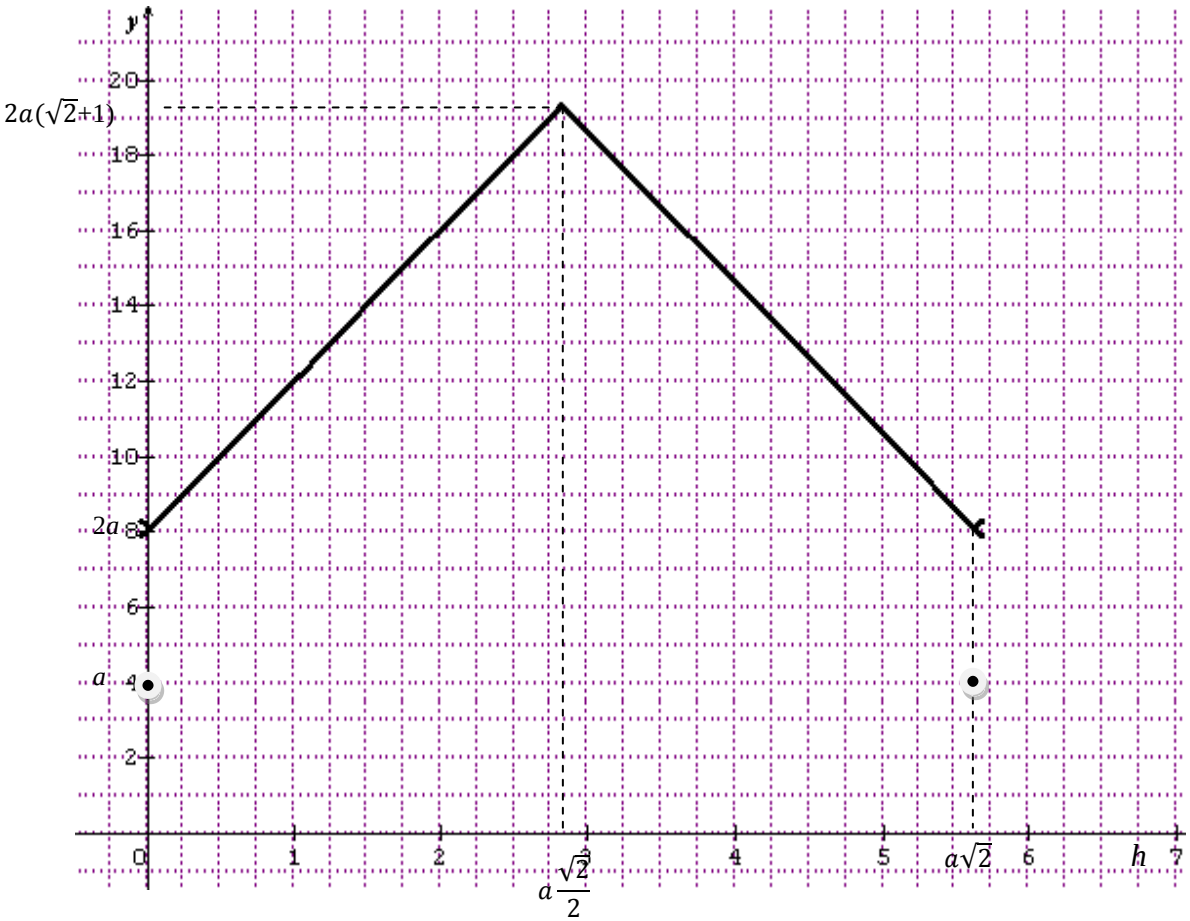
Par conséquent, pour tout $h \in [\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\,;\ a\sqrt{2}\,[$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(h) = 4(a\sqrt{2} - h) + 2\,a}$$

Nous retrouvons bien $\mathcal{L}(\frac{a\sqrt{2}}{2})=2(1+\sqrt{2})\ a$

Remarque : la fonction $\mathcal{L}$ est continue sur $]\,0\,;\ a\sqrt{2}\,[$, mais elle n'est continue ni en 0, ni en $a\sqrt{2}$.

Voici la représentation graphique en repère orthogonal de la fonction $\mathcal{L}$ sur $\left[0\ ;\ a\sqrt{2}\right]$ lorsque $a = 4$:



Remarque : la fonction $\mathcal{L}$ admet son maximum lorsque $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. La ligne de niveau associée est alors le rectangle BDHF.

2) Aire des surfaces de niveau

L'aire des surfaces de niveau peut aussi s'exprimer en fonction de la hauteur de liquide contenu. Notons $\mathcal{S}$ la fonction qui, à la hauteur de liquide h, associe l'aire de la surface de niveau matérialisée sur le cube. Il convient de distinguer 3 cas :

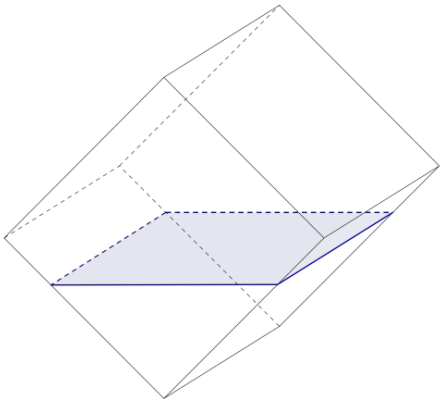
- **1er cas** : si $h = 0$ ou si $h = a\sqrt{2}$

Les surfaces de niveau correspondantes sont réduites chacune à un segment de longueur a.

Par conséquent, $\mathcal{S}(0) = 0$ et $\mathcal{S}(a\sqrt{2}) = 0$:

- **2ème cas** : si $h \in \left]0 ; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$

Les surfaces de niveau sont des rectangles « pleins » dont deux côtés consécutifs ont pour mesures respectives a et $2h$.

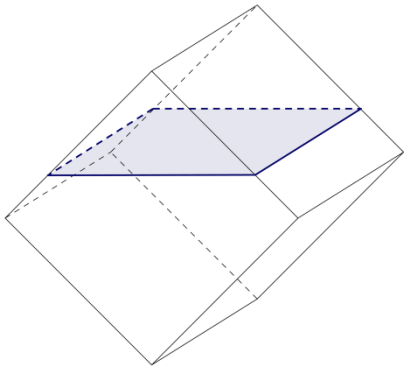


Par conséquent, lorsque $h \in \left]0 ; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$

$$\mathcal{S}(h) = 2\,ah$$

3ème cas : si $h \in \left[\frac{a\sqrt{2}}{2} ; a\sqrt{2}\right[$

Les surfaces de niveau sont des rectangles « pleins » dont deux côtés consécutifs ont pour mesures respectives a et $2(a\sqrt{2} - h)$



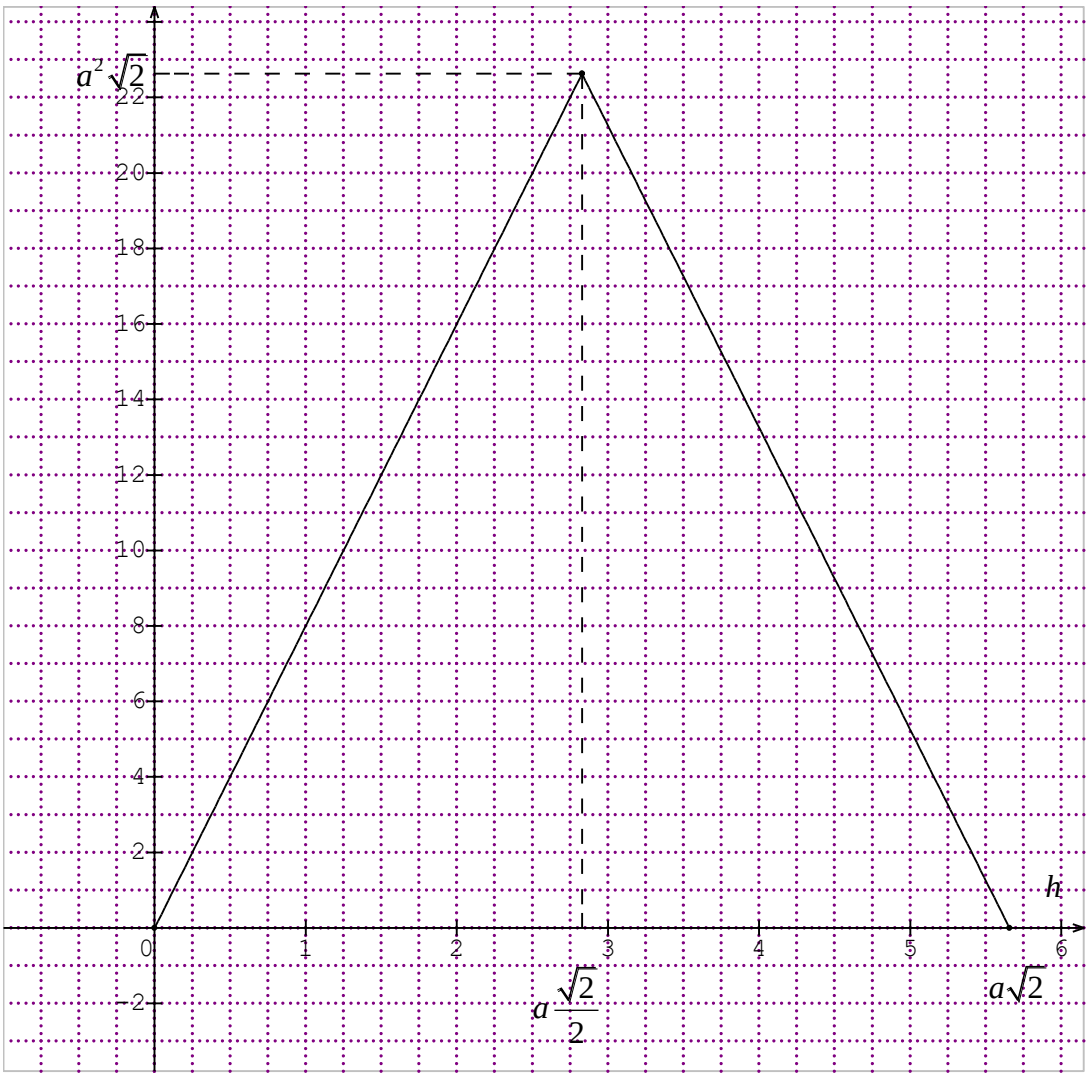
Par conséquent, lorsque $h \in \left[\frac{a\sqrt{2}}{2} ; a\sqrt{2}\right[$

$$\mathcal{S}(h) = 2a(a\sqrt{2} - h)$$

Remarquons que les deux expressions de $\mathcal{S}(h)$ fournissent $\mathcal{S}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a^2\sqrt{2}$.

En résumé, la fonction $\mathcal{S}$ est affine par intervalles et continue sur l'intervalle $[0 ; a\sqrt{2}]$.

Voici la représentation graphique en repère orthogonal de la fonction S sur $\left[0\ ;\ a\sqrt{2}\right]$ obtenue avec $a = 4$:

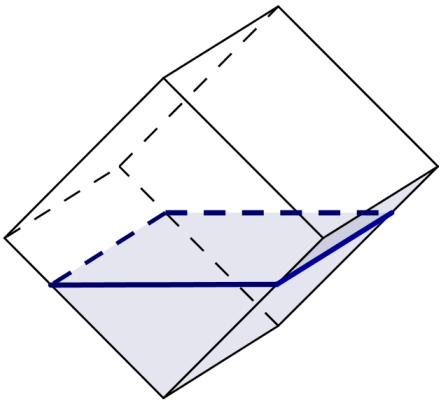


3) Volume des solides associés

Notons φ la fonction définie sur $[0\ ;\ a\sqrt{2}\,]$ qui à h associe le volume v de liquide coloré contenu dans le cube. Nous avons bien sûr :
$\varphi(0) = 0$ (pour le cube vide) et $\varphi(a\sqrt{2}) = a^3$ (pour le cube plein).
Distinguons deux cas :

- **1er cas** : si $h \in\ ]\,0\ ;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}]$

Le liquide remplit un prisme de hauteur a et de base un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure $2h$.



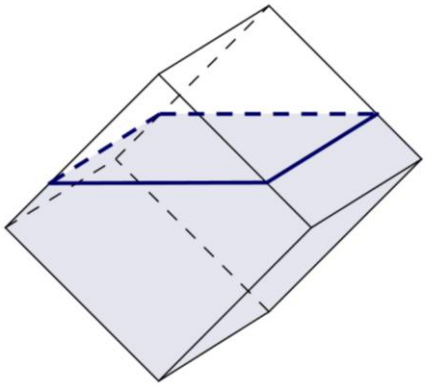
Alors, $\varphi(h) = \frac{1}{2}h \times 2h \times a$

Par conséquent, pour tout $h \in\ ]\,0\ ;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}]$

$$\boldsymbol{\varphi(h) = ah^2}$$

En particulier, on obtient $\varphi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^3}{2}$ (cube à moitié plein)

- **2ème cas** : si $h \in [\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\ ;\ a\sqrt{2}\,[$



La partie non remplie du cube détermine un prisme de hauteur a et de base un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure $a\sqrt{2} - h$. Le volume de ce prisme est $a(a\sqrt{2} - h)^2$.

Donc, par complémentarité, on obtient

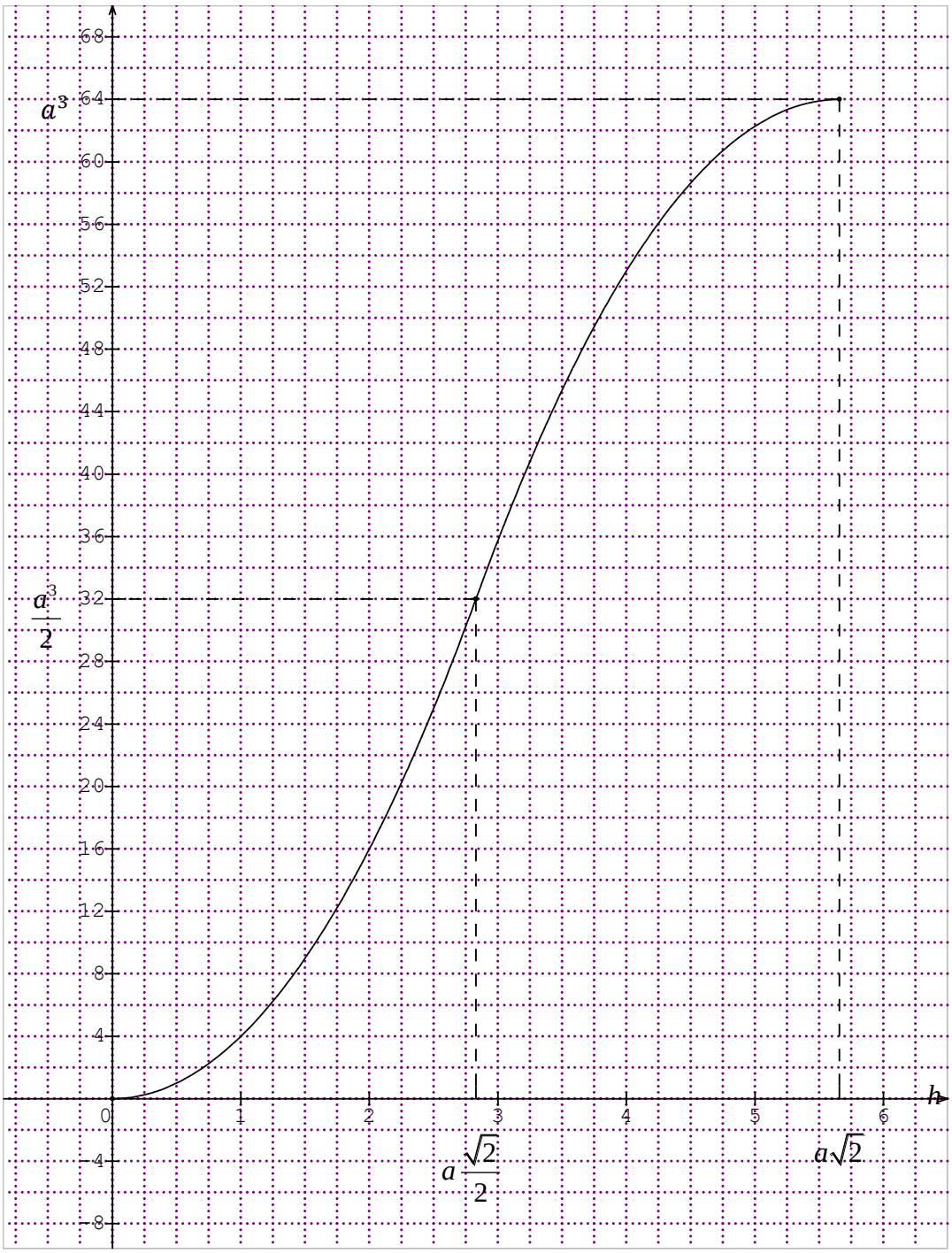
$$\varphi(h) = a^3 - a(a\sqrt{2} - h)^2$$

Par conséquent, pour tout $h \in [\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\ ;\ a\sqrt{2}\,[$,
on obtient :

$$\boldsymbol{\varphi(h) = a^3 - a(a\sqrt{2} - h)^2}$$

On retrouve $\varphi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^3}{2}$.

Voici la représentation graphique en repère orthogonal de la fonction φ définie sur $\left[0\ ;\ a\sqrt{2}\ \right]$ avec $a = 4$:



Remarque : φ est une fonction polynôme de degré 2 par intervalles.
φ réalise une bijection continue, strictement croissante de $\left[0\ ;\ a\sqrt{2}\ \right]$ sur $[0\ ;\ a^3\ ]$.
Nous pouvons montrer, pour tout h de $\left[0\ ;\ a\sqrt{2}\ \right]$, l'égalité $\varphi(\ a\sqrt{2}-h) + \varphi(\ h) = a^3$.
Ainsi, les deux arcs de parabole constituant la représentation graphique de φ sont symétriques par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{a^3}{2}\right)$

4) Jauge

La réalisation d'une jauge (dispositif propre à indiquer la quantité de liquide stocké dans un réservoir) sur la face frontale du cube peut se faire à l'aide du graphique page précédente, représentant la fonction φ associant le volume à la hauteur de liquide sur la face frontale. Dans ce but, on réalise une suite de repères pour des valeurs remarquables du volume.

Pour obtenir cette graduation de la jauge, nous utiliserons la fonction réciproque de la fonction φ. Notons Ψ cette fonction définie sur [0 ; a^3.] qui, au volume *v*, associe la hauteur *h* correspondante.

- **1er cas** : si $v \in \left[0; \frac{a^3}{2}\right]$

Pour un volume *V* appartenant à cet intervalle, nous avons obtenu $v = \varphi(h) = ah^2$.
Soit $h^2 = \frac{v}{a}$.
Puisque *h* désigne un réel positif ou nul, nous avons donc $h = \sqrt{\frac{v}{a}}$.
Ainsi, pour tout réel $v \in \left[0; \frac{a^3}{2}\right]$, $\boldsymbol{\Psi}(v) = \sqrt{\frac{v}{a}}$

On obtient en particulier $\Psi(0) = 0$ (hauteur du liquide lorsque le cube est vide)
et $\Psi\left(\frac{a^3}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (hauteur du liquide lorsque le cube est à moitié plein).

- **2ème cas** : si $v \in \left[\frac{a^3}{2}; a^3\right]$

Nous avons obtenu $v = \varphi(h) = a^3 - a\left(a\sqrt{2} - h\right)^2$ d' où $\left(a\sqrt{2} - h\right)^2 = \frac{a^3 - v}{a}$
Notons que $0 \leq h \leq a\sqrt{2}$ et par suite $a\sqrt{2} - h \geq 0$.

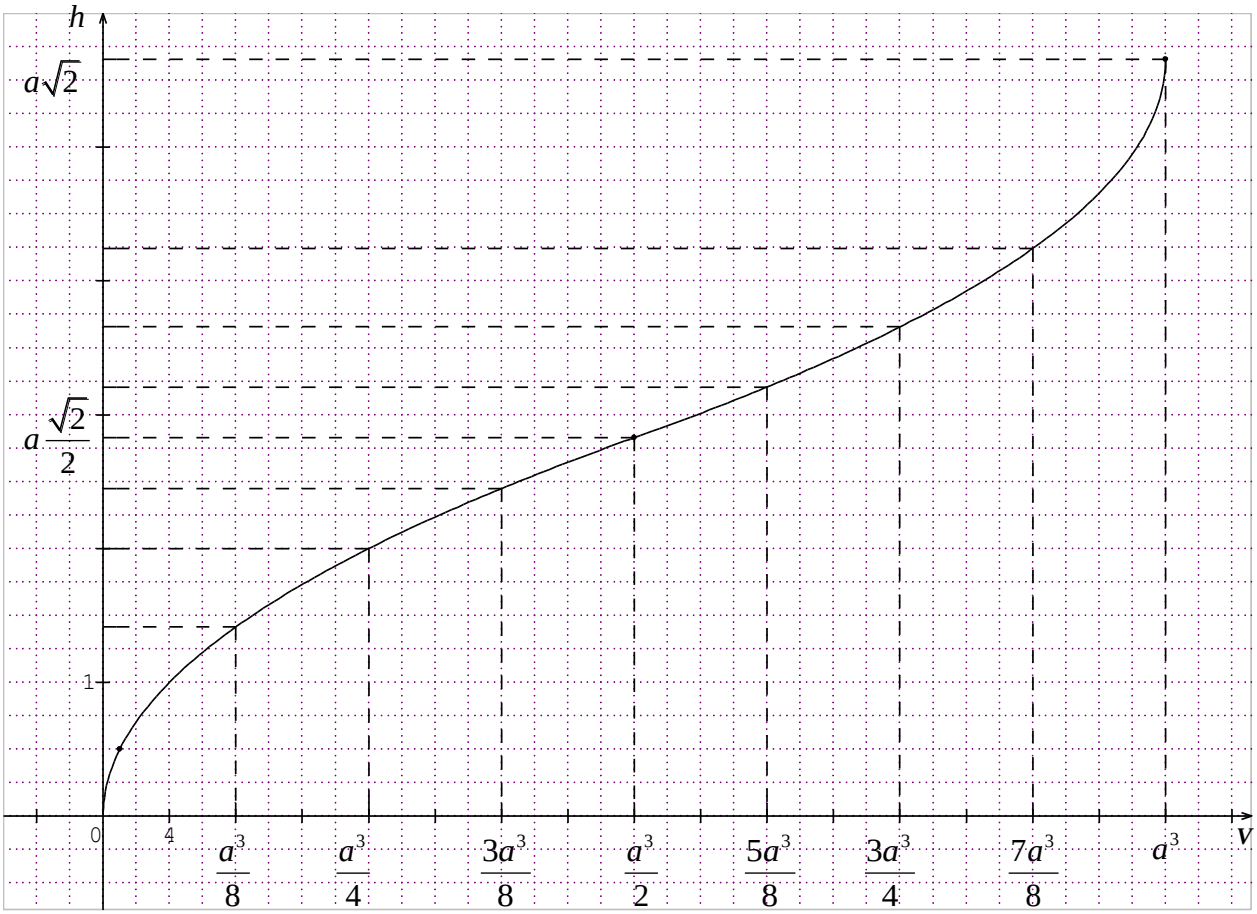
Par conséquent, $a\sqrt{2} - h = \sqrt{\frac{a^3 - v}{a}}$ et par suite $h = a\sqrt{2} - \sqrt{\frac{a^3 - v}{a}}$

Ainsi, pour tout réel $v \in \left[\frac{a^3}{2}; a^3\right]$, $\boldsymbol{\Psi(v) = a\sqrt{2} - \sqrt{\frac{a^3 - v}{a}}}$

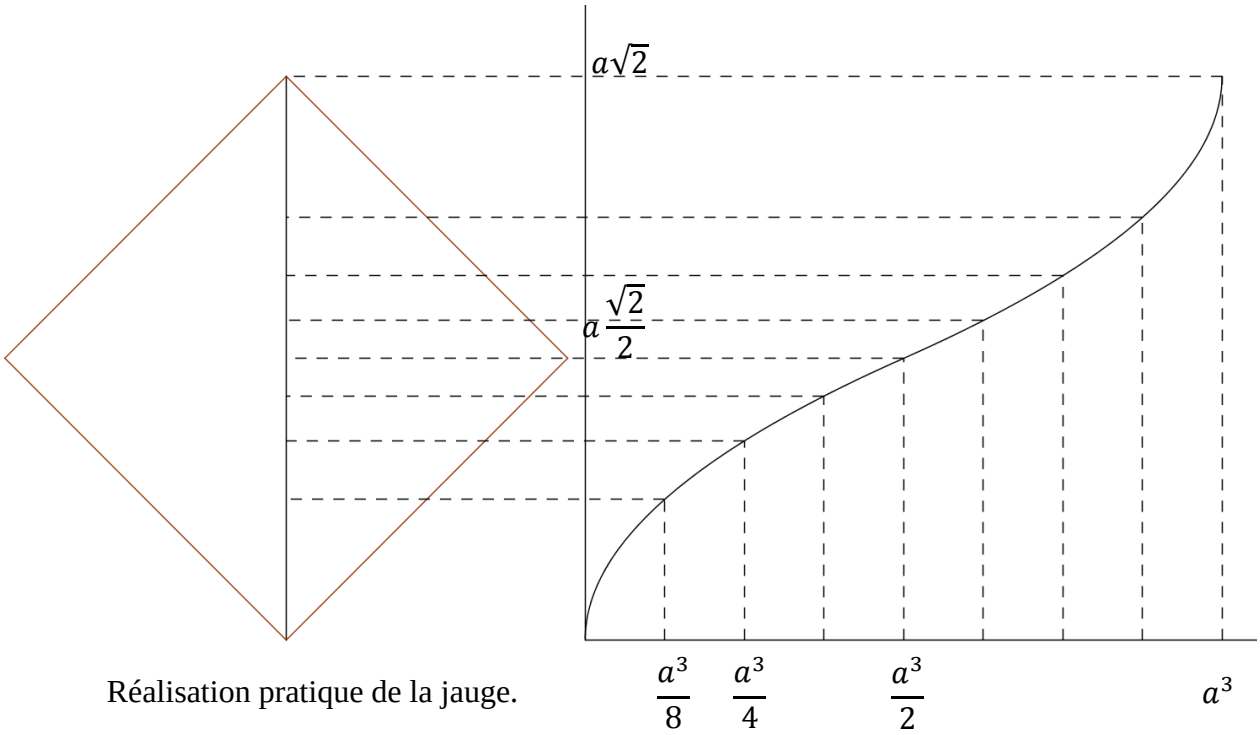
On retrouve $\Psi\left(\frac{a^3}{2}\right) = a\sqrt{2} - \sqrt{\frac{a^3 - \frac{a^3}{2}}{a}} = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ comme dans le premier cas.
Enfin, $\Psi(a^3) = a\sqrt{2}$ (hauteur du liquide lorsque le cube est plein)

Nous pouvons montrer, pour tout *h* de[0 ; a^3], l'égalité $\Psi(a^3 - h) + \Psi(h) = a\sqrt{2}$
La représentation graphique de Ψ est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{a^3}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

Voici la représentation graphique en repère orthogonal de la fonction Ψ lorsque $a = 4$



On obtient sur l'axe des ordonnées une jauge de la diagonale de la face frontale, graduée ici en 8ème de volume total du cube.



Réalisation pratique de la jauge.

- **Etude de la dérivabilité de Ψ**

Le sens de variation de Ψ est connu. Le but est de faire une étude locale complète aux points d'abscisse 0, $a^3/2$, a^3, soit au début, au milieu et à la fin du remplissage.

Remarquons toutefois que , pour tout réel $v \in \left[0; \frac{a^3}{2}\right]$, $\boldsymbol{\Psi}(v) = \sqrt{\frac{v}{a}}$

Ψ est alors dérivable sur]0 ; $a^3/2$ [et Ψ' (t) = $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{av}}$

Lorsque $v \in [a^3/2; a^3]$, $\Psi(v) = a\sqrt{2} - \sqrt{\frac{a^3-v}{a}}$

Ψ est alors dérivable sur] $a^3/2$; a^3 [et $\Psi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{a^4-av}}$

Etudions la dérivabilité (à droite)de Ψ en 0

Le taux d'accroissement s'écrit $\frac{\psi(v)-\psi(0)}{v} = \frac{1}{\sqrt{av}}$ et donc $\lim_{v\to 0}\frac{\psi(v)-\psi(0)}{v} = +\infty$

On en déduit que Ψ n'est pas dérivable (à droite) en 0.

Etudions la dérivabilité (à gauche) de Ψ en $a^3/2$

le taux d'accroissement s'écrit $\frac{\psi(v)-\psi(\frac{a^3}{2})}{v-\frac{a^3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{v}{a}}-a\frac{\sqrt{2}}{2}}{v-\frac{a^3}{2}}$

soit après calcul $\frac{\psi(v)-\psi(\frac{a^3}{2})}{v-\frac{a^3}{2}} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{v}{a}}+a\frac{\sqrt{2}}{2}}$

On en déduit enfin : $\lim\limits_{t\to\frac{a^3}{2}} \frac{\psi(v)-\psi(\frac{a^3}{2})}{v-\frac{a^3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}a^2}$

Ψ est dérivable (à gauche) en $a^3/2$ et $\psi'_g(a^3/2) = \frac{1}{\sqrt{2}a^2}$

Par symétrie de la représentation graphique de la fonction ψ, nous en déduisons que

Ψ est dérivable (à droite) en $a^3/2$ et $\Psi'_d(a^3/2) = \frac{1}{\sqrt{2}a^2}$

La fonction Ψ est donc dérivable en $v = a^3/2$ puisqu'elle est dérivable à gauche et à droite en ce point et que ses nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

On a $\Psi'(a^3/2) = \frac{1}{\sqrt{2}a^2}$

Toujours par symétrie, la non dérivabilité à droite de Ψ en 0 implique la non dérivabilité à gauche de Ψ en a^3.

Enfin, les fonctions en jeu étant dérivables sur]0 ; a^3 [nous pouvons dériver l'égalité $\psi(a^3 - v) + \psi(v) = a\sqrt{2}$ et prouver ainsi l'égalité
$\boldsymbol{\psi'(a^3 - v) = \psi'(t)}$ pour tout v de [0 ; a^3]
Ceci nous prouve que, dans un repère orthogonal, la droite d'équation $\boldsymbol{v = a^3/2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de ψ'.

En conclusion, la fonction Ψ est définie continue sur l'intervalle [0 ; $\boldsymbol{a^3}$], et dérivable sur l'intervalle]0 ; $\boldsymbol{a^3}$ [, (elle n'est dérivable ni en 0, ni en $\boldsymbol{a^3}$).

- **Etude de la dérivabilité de Ψ'**

Rappelons que ψ est dérivable sur]0 ; $a^3/2$ [et $\psi'(v) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{av}}$

Ψ' est alors dérivable sur]0 ; $a^3/2$ [et $\Psi''(v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{-1}{av^2}}{2\sqrt{\frac{1}{av}}}$ soit $\Psi''(v) = -\dfrac{1}{4v\sqrt{av}}$

$\Psi''(v)$ est strictement négative sur]0 ; $a^3/2$ [

Rappelons que Ψ est dérivable sur] $a^3/2$; a^3 [et $\psi'(v) = \dfrac{1}{2\sqrt{a^4 - av}}$
Ψ' est alors dérivable sur] $a^3/2$; a^3 [et $\psi''(t) = \dfrac{a}{4}\,(a^4 - av)^{-3/2}$
$\Psi''(v)$ est strictement positive sur] $a^3/2$; a^3 [

- **Etudions la dérivabilité (à gauche) de Ψ' en $\boldsymbol{a^3/2}$**

Lorsque $v \in]0 ; a^3/2[$ $\quad \psi'(v) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{av}}$

$$\frac{\psi'(v) - \psi'(\frac{a^3}{2})}{v - \frac{a^3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{av}} - \frac{1}{a^2\sqrt{2}}}{v - \frac{a^3}{2}}$$ soit après calcul $$\frac{\psi'(v) - \psi'(\frac{a^3}{2})}{v - \frac{a^3}{2}} = \frac{-1}{a^2\left(a\sqrt{av} + v\sqrt{2}\right)}$$

On obtient enfin $\displaystyle\lim_{t \to \frac{a^3}{2}} \frac{\psi'(v) - \psi'(\frac{a^3}{2})}{v - \frac{a^3}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}a^5}$

Ψ' est dérivable (à gauche) en $\boldsymbol{a^3/2}$ et $\boldsymbol{\Psi''_g(a^3/2) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}a^5}}$

- **Etudions la dérivabilité (à droite) de Ψ' en $\boldsymbol{a^3}$:**

La relation $\boldsymbol{\Psi'(a^3 - v) = \Psi'(v)}$ pour tout v de [0 ; a^3] et la symétrie de la représentation graphique de ψ', nous permettent de conclure que :

Ψ' est dérivable (à droite) en $\boldsymbol{a^3/2}$ et $\boldsymbol{\Psi''_d(a^3/2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}a^5}}$

- **Conclusion**

  Ψ' est dérivable en tout point *v* des intervalles]0 ; $a^3/2$ [et] $a^3/2$; a^3 [
  Ψ' n'est pas dérivable en *v* = $a^3/2$, mais est néanmoins dérivable à gauche et à droite en ce point, ses dérivées à gauche et à droite étant opposées.

  Les fonctions f_1 et f_2 définies par $f_1(v) = \Psi'(a^3 - v)$ et $f_2(v) = \Psi'(v)$ étant dérivables sur les intervalles]0 ; $a^3/2$ [et] $a^3/2$; a^3 [, nous pouvons déduire de l'égalité de f_1 et f_2 l'égalité de leurs dérivées f'_1 et f'_2 .
  Ainsi, pour tout *v* de]0 ; $a^3/2$ [$\cup$] $a^3/2$; a^3[, nous en déduisons l'égalité $\Psi''(a^3 - v) = -\Psi''(v)$
  Le point de coordonnées $\left(\frac{a^3}{2}; 0\right)$ est par conséquent le centre de symétrie de la courbe représentative de ψ''.

- **Récapitulatif sous forme de tableau** :

On a représenté ci-dessous les tableaux de variation des fonctions Ψ *et* Ψ'.

v	0		$a^3/2$		a^3
Signe de $\Psi''(v)$		—	‖	+	
$\Psi'(v)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}a^2}$	↗	$+\infty$
Signe de $\Psi'(v)$		+		+	
$\Psi(v)$	0	↗	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$a\sqrt{2}$

5) Remplissage

Un liquide est versé à débit constant dans le cube initialement vide. Nous étudions ici l'évolution de la hauteur de liquide (en fonction du temps !) au cours du remplissage.

- **Notations et unités**

  a est la constante arête du cube (en dm). D est la constante débit de remplissage (en $dm^3\ s^{-1}$)
  t est la variable temps (en s)
  Nous noterons M(t) le point de contact du liquide et de la diagonale [CA] au cours du remplissage.
  Enfin, les fonctions V et H seront définies sur un intervalle de temps I par :

  $I \rightarrow [0\ ;\ a^3\ ]$ $\qquad$ $I \rightarrow [0\ ;\ a\sqrt{2}\ ]$
  $t \mapsto V(t)$ $\qquad$ $t \mapsto H(t)$
  V(t) : volume de liquide à l'instant t (en dm^3) $H(t)$: hauteur de liquide à l'instant t (en dm)

- **Etude de la fonction V et détermination de l'intervalle I.**

  On a V(t) = Dt $\qquad$ V est une fonction affine (linéaire) du temps.
  Le cube est plein lorsque V(t) = a^3 soit lorsque $t = a^3/D$

  La fonction V est donc définie et strictement croissante sur l'intervalle I = [0 ; a^3/D]

- **Etude de la fonction H sur l'intervalle I = [0 ; a^3/D]**

  Remarquons que H = $\Psi o V$ ou encore H(t) = $\Psi o V(t)$
  La fonction V est continue, strictement croissante de [0 ; a^3/D] sur [0 ; a^3] et la fonction Ψest continue, strictement croissante de [0 ; a^3] sur $[0\ ;\ a\sqrt{2}\ ]$
  Par composition, **H est continue, strictement croissante de [0 ; a^3/D] sur$[0\ ;\ a\sqrt{2}\ ]$**

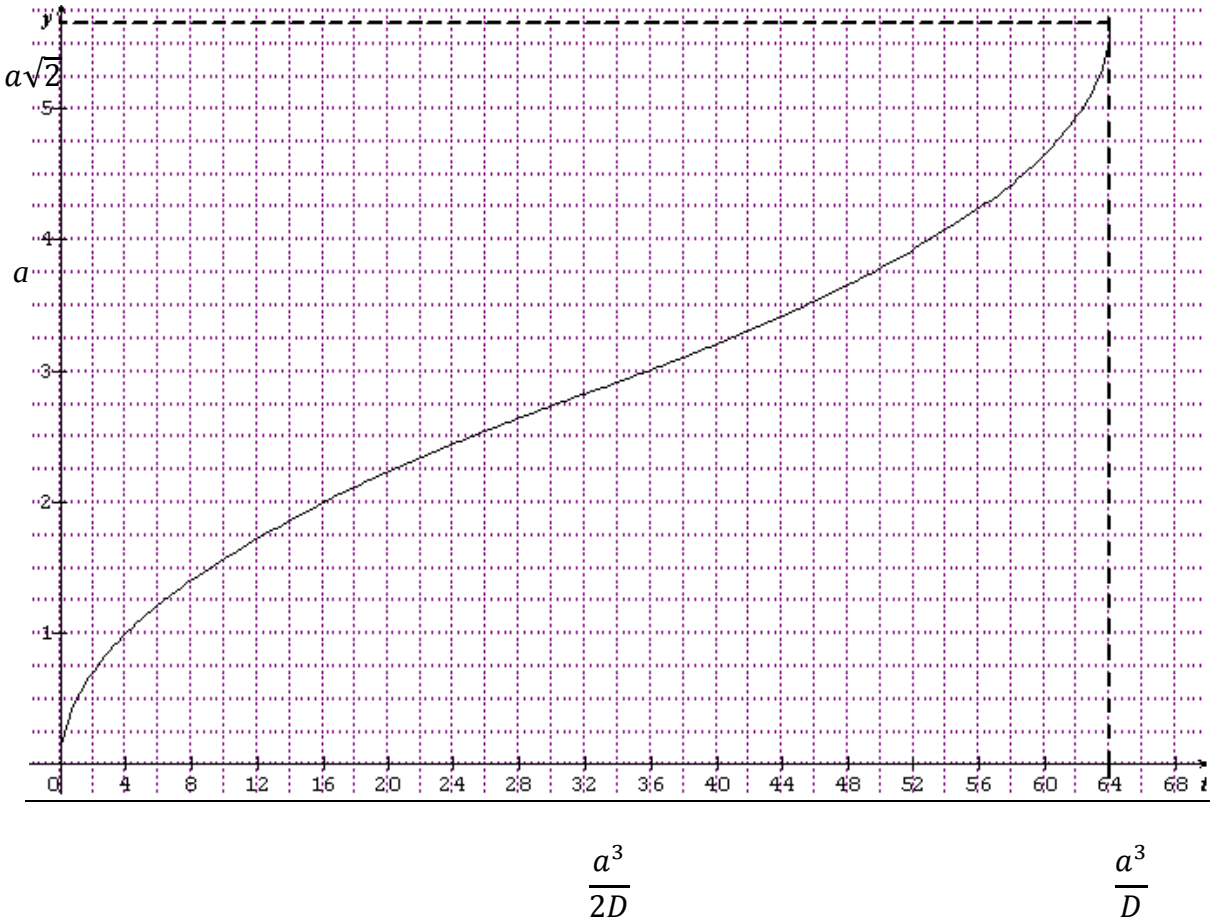
  Remarquons que cette croissance est tout à fait évidente, étant une conséquence directe de l'expérience de remplissage du cube.
  La problématique du remplissage nous amène à étudier si la fonction H est deux fois dérivable sur I.

  La fonction affine V étant dérivable sur I, le théorème de composition nous permet de donner les résultats suivants :

  La fonction H est définie continue sur l'intervalle [0 ; a^3/D], dérivable sur l'intervalle]0 ; a^3/2 [, et n'est dérivable ni en 0, ni en a^3/D .
  H' est dérivable en tout point t des intervalles]0 ; a^3/D [et] $a^3/2D$; a^3/D [
  H' n'est pas dérivable en $t = a^3/2D$, mais est néanmoins dérivable à gauche et à droite en ce point, ses dérivées à gauche et à droite étant opposées.

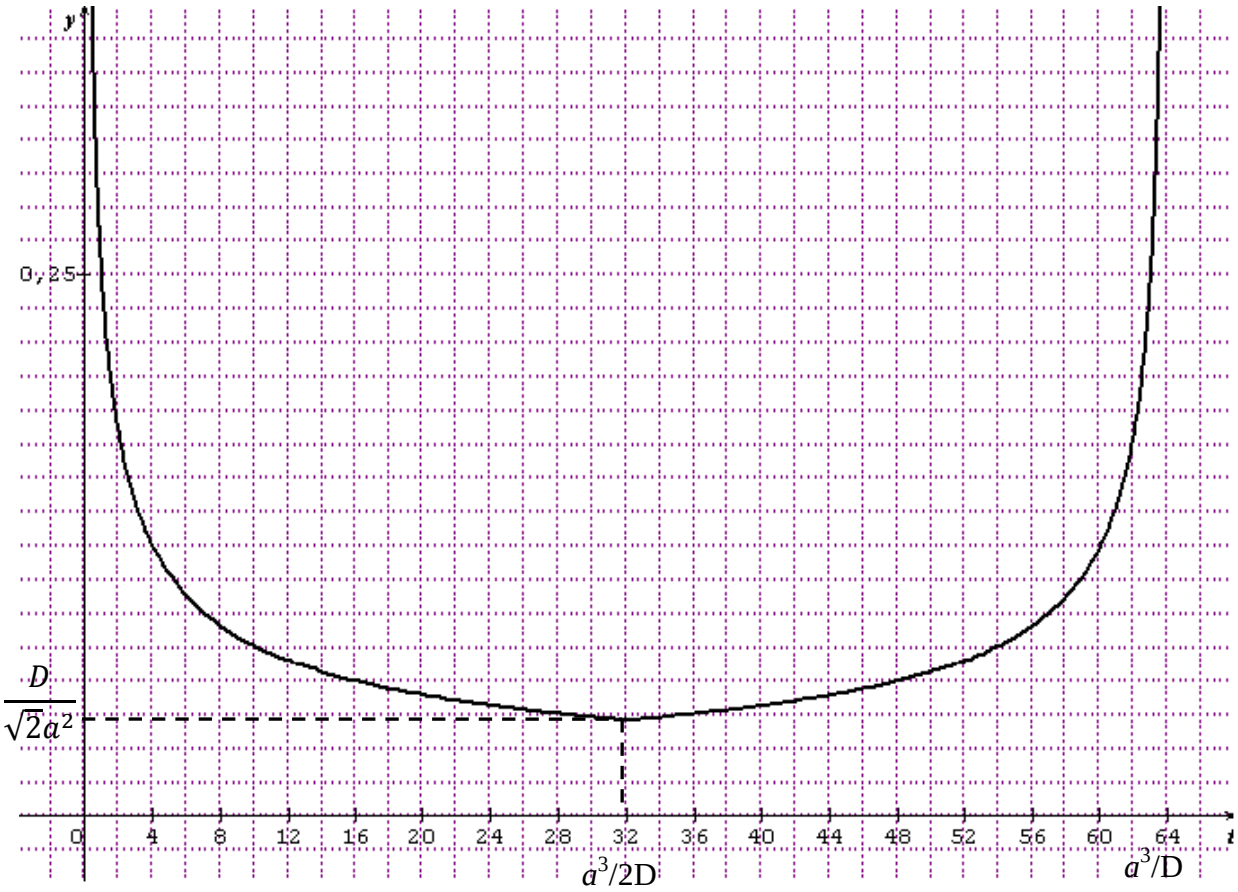
  Nous avons enfin les propriétés graphiques :
  Le point de coordonnées ($a^3/2D$;$a\frac{\sqrt{2}}{2}$) est le centre de symétrie de la courbe représentative de H.
  Dans un repère orthogonal, la droite d'équation $t = a^3/2D$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de H'.
  Le point de coordonnées $\left(\frac{a^3}{2D}; 0\right)$ est le centre de symétrie de la courbe représentative de H''.

Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction H définie sur [0 ; a^3/D] lorsque a = 4 dm et D = 1 dm^{3}s^{-1}.

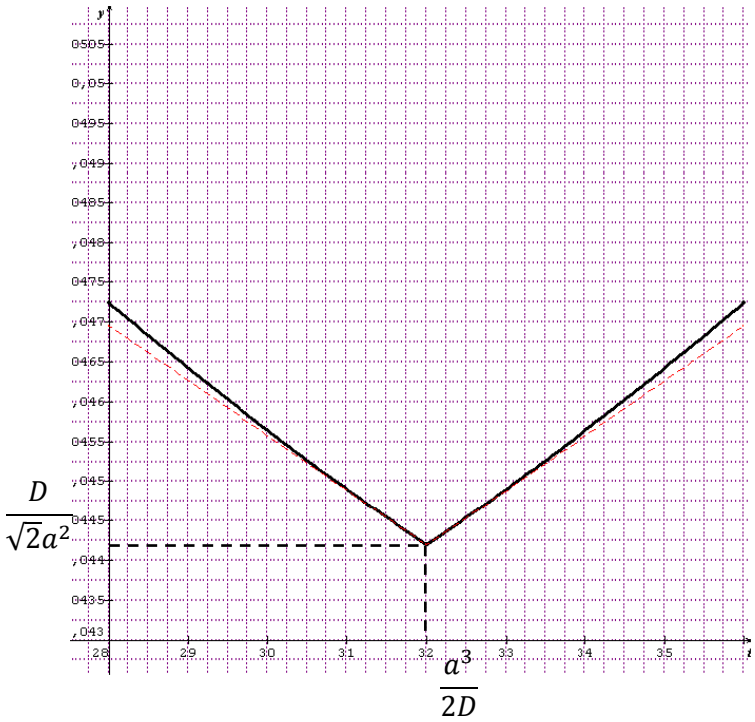


Remarque : nous avons pour tout t de I, $H(t) = \Psi(\mathrm{D}t)$
Ainsi, la courbe de H, hauteur de liquide en fonction du temps, se déduit de la courbe de Ψ, hauteur de liquide en fonction de V, par affinité orthogonale d'axe (Oy) et de rapport 1/D
Dans le cas particulier choisi où D = 1, les représentations graphiques des fonctions H et Ψ sont superposables.

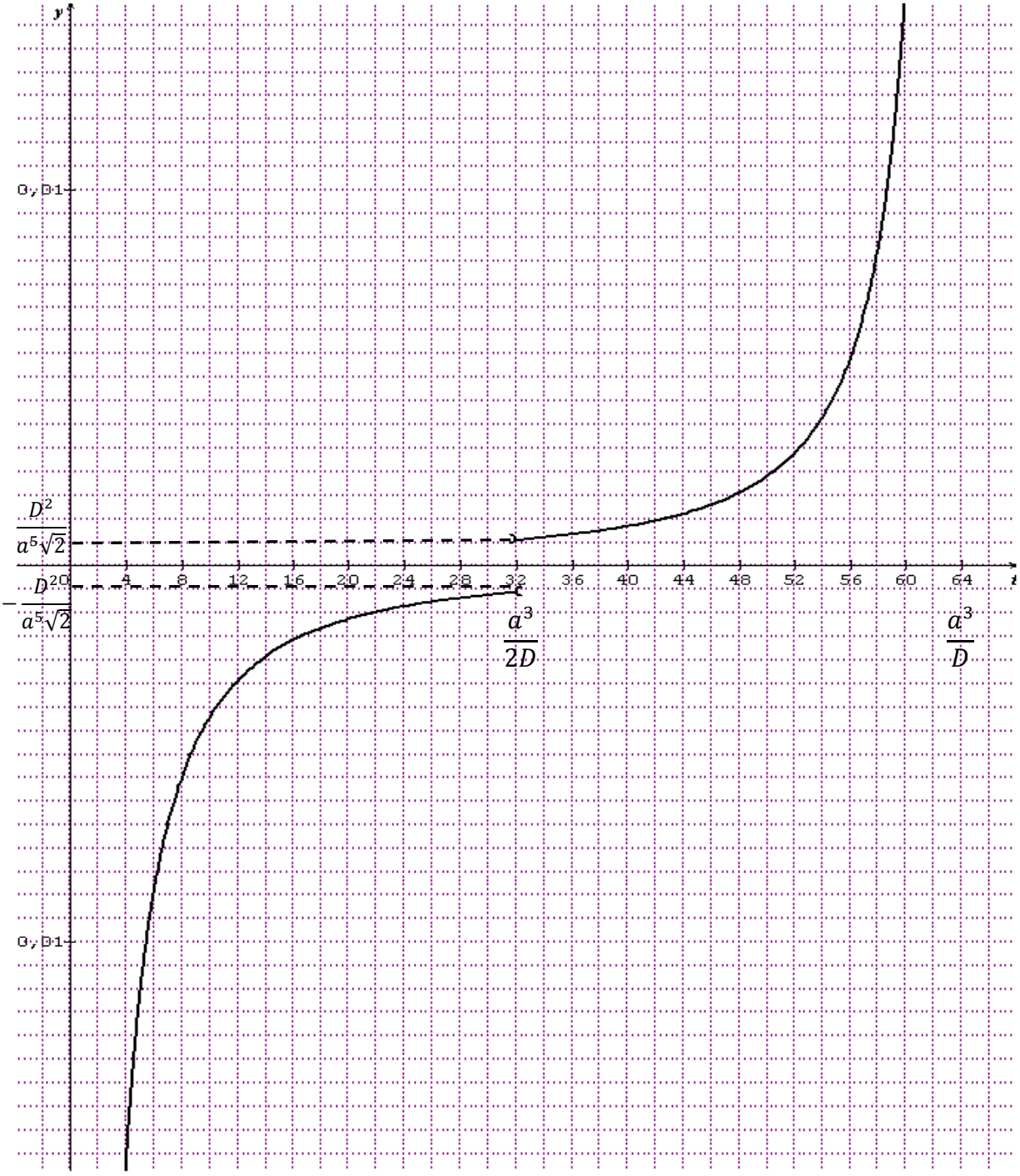
Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction H' lorsque a = 4 dm et D = 1 dm^{3}s^{-1}.



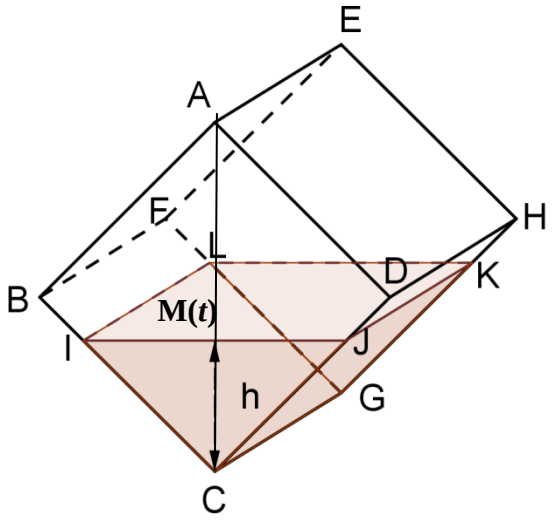
Observons un agrandissement de la courbe précédente centré au point d'abscisse $a^3/2D$
La non dérivabilité de H ' au point d'abscisse $a^3/2D$ se traduit graphiquement par un point anguleux.
La courbe représentative de H ' (en gras) est située au dessus de ses demi-tangentes (en pointillés) au point minimum.



Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction H'' lorsque a = 4 dm et D = 1 dm^{3}s^{-1}.



- **Interprétation**



On s'intéresse au remplissage d'un cube d'arête *a* de longueur 4 dm à un débit constant *D* égal à 1 dm^3s^{-1}.

La hauteur de remplissage croît continûment de 0 dm à $4\sqrt{2}$ dm.
Le point M(t) va de C à A lorsque *t* passe de 0 à 64 secondes.
La vitesse du point M(t) décroît durant la première moitié du remplissage (32 secondes).
Elle vaut 2,5 dm s^{-1} lorsque $t = 0{,}01$ s ; elle vaut 0,25 dm s^{-1} lorsque $t = 1$ s.
Elle atteint son minimum, $\frac{1}{16\sqrt{2}}$ soit environ 0,044 dm s^{-1} lorsque $t = 32$ s.

Le mouvement de M est retardé sur [0 ;32]

L'accélération de M(*t*), donnée par $H''(t)$ est donc négative lorsque $t \in\ ]0\ ;\ 32[$.
Elle vaut -125 dm s^{-2} au temps 0,01 s ; elle vaut -0,125 dm s^{-1} au temps 1 s.
Elle s'approche de $\frac{-1}{1024\sqrt{2}}$, soit environ -0,00069 dm s^{-2} au voisinage de 32 s (avec t < 32). Ainsi, elle vaut environ -0,00072 dm s^{-2} au temps 31 s.

La vitesse du point M(t) croît durant la deuxième moitié du remplissage (32 secondes).
Elle atteint donc son minimum $\frac{1}{16\sqrt{2}}$, soit environ 0,044 dm s^{-1} au temps 32 s.
Elle vaut 0,05 dm s^{-1} au temps 39s.
Elle vaut 0,25 dm s^{-1} au temps 63 s et elle vaut 2,5 dm s^{-1} au temps 63,99 s.

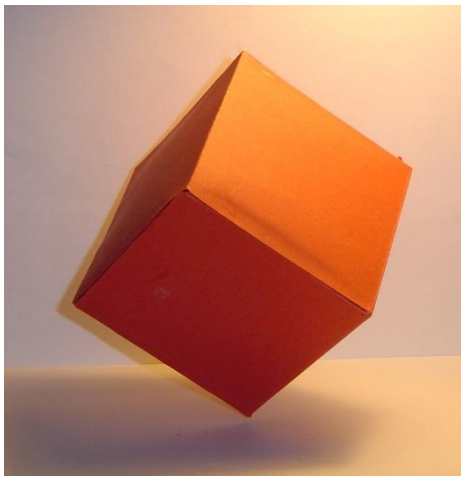
Le mouvement de M est accéléré sur [32 ;64]

Cette fois, le demi-cube se « resserre », l'aire de la surface du liquide décroît, donc la vitesse de remplissage devient croissante.
L'accélération de M(*t*), donnée par $H''(t)$ est donc positive lorsque $t \in\ ]32\ ;\ 64[$.
Elle est proche de $\frac{1}{1024\sqrt{2}}$, soit environ 0,00069 dm s^{-2} lorsque *t* est voisin de 32 s ($t > 32$).
Ainsi, elle vaut environ 0,00072 dm s^{-2} au temps 33 s.
Elle vaut 0,125 dm s^{-1} au temps 63 s et elle vaut 125 dm s^{-2} au temps 63,99 s.

Remarquons qu'au milieu du remplissage, le mouvement du point M(t) **passe de retardé à accéléré sans que l'accélération ne s'annule.** Il y a une « rupture » dans les variations de la vitesse de remplissage ; nous pouvons penser que l'angle droit entre les faces ABFE et BCGF peut être la cause de cette rupture. Dans le cas du remplissage d'une sphère ou d'un cylindre, on ne trouverait pas cette rupture.

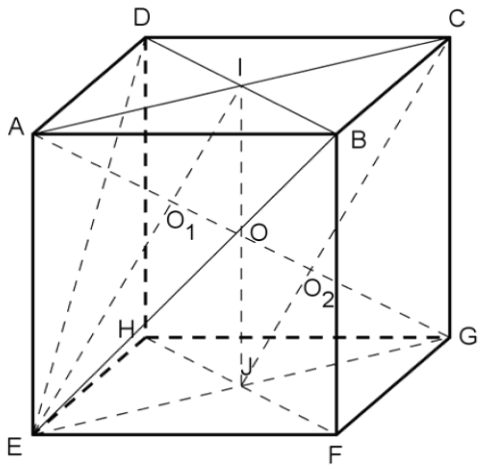
Troisième Partie

Le cube en position gamma



I. Représentation en perspective cavalière du cube en position γ

1) Propriétés du cube utilisées dans ce paragraphe



Le cube ci-contre est représenté en perspective cavalière dans la position α.
La droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE) et coupe celui-ci en O_1.
La droite (AG) est également perpendiculaire au plan (CFH) et coupe celui-ci en O_2.

O_1 est le centre du triangle équilatéral BDE
et O_2 est le centre du triangle équilatéral CFH.

Si *a* désigne la longueur de l'arête du cube, alors :

$AG = a\sqrt{3}$,
$AO_1 = a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $O_1O_2 = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $O_2G = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

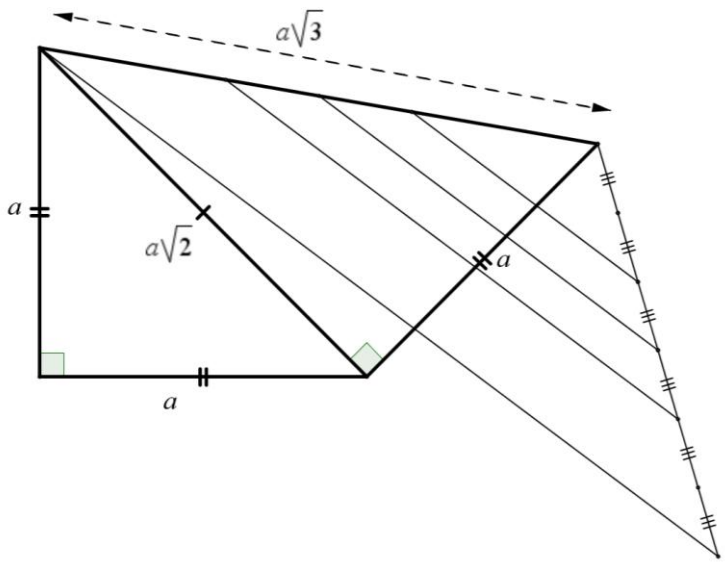
Ces propriétés sont démontrées page 59.

2) Construction du cube en position γ

A partir de la position α, représentons ce cube en perspective cavalière dans la position γ .
Le plan frontal est choisi parallèle au plan (AEGC) la droite (AG) est verticale.
Rappelons qu'alors, les plans (EDB) et (FHC) sont horizontaux.

Constructions préalables

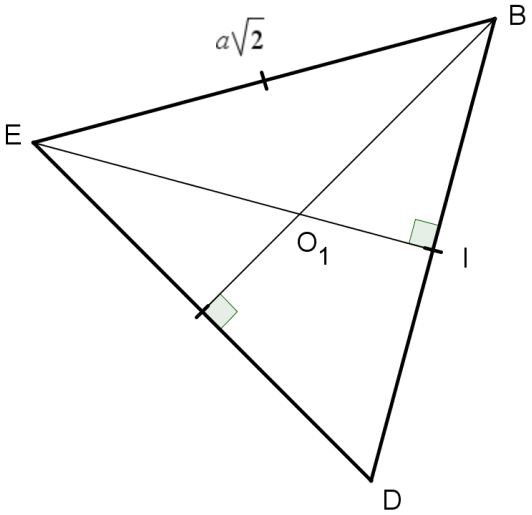
- Construction d'un segment de longueur $a\sqrt{3}$ partagé en trois parties égales et de son milieu



Les tracés peuvent être réalisés à la règle et au compas à partir d'un segment de longueur *a*.
Le segment de longueur $a\sqrt{3}$ permettra de construire le segment vertical [AG].

En utilisant une situation de Thalès, nous pouvons partager ce segment en trois segments de même longueur et également construire le milieu de ce segment. Sur la diagonale [AG], nous obtenons donc les points O_1,O et O_2.

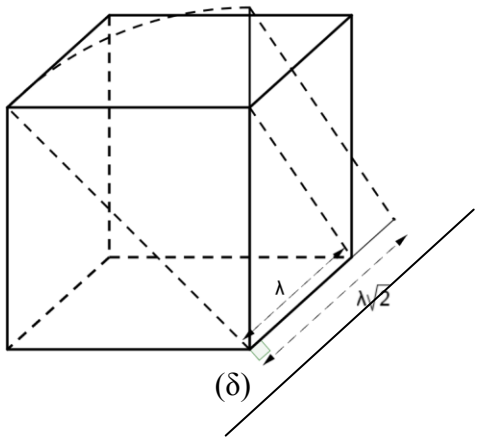
- Construction du segment [EO_1] représenté en vraie grandeur

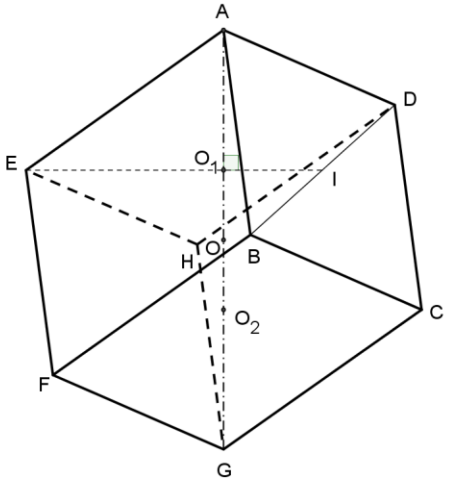


Il suffit de reporter la longueur $a\sqrt{2}$ obtenue dans la construction précédente, puis de construire un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$
et deux médianes de ce triangle.
Le segment [EI] appartient au plan (AEGC) et sera représenté en vraie grandeur.
D'autre part, (AG) est perpendiculaire au plan (BDE) et en particulier à la droite (EI) au point O_1.

Nous terminerons la construction en remarquant que la droite (BD) est perpendiculaire au plan (AEGC) puisqu'elle est à la fois perpendiculaire à (AC) et à (EI) qui sont deux droites sécantes de ce plan.
[BD] sera ainsi construite à partir de son milieu I parallèlement à une fuyante (δ). C est le symétrique de A par rapport à I (et de E par rapport à O, milieu de [AG])
Il ne restera qu'à construire les symétriques de B,D par rapport au milieu O de [AG] et à compléter le tracé du cube.

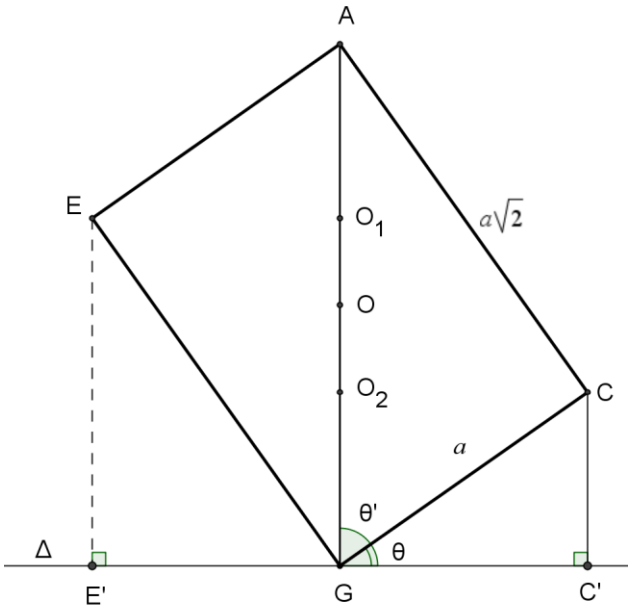
Sur le cube dessiné ci-dessous en position α, on a laissé apparents les traits de construction qui permettent de tracer un segment de longueur $a\sqrt{2}$ dans la direction (δ) des fuyantes.





On a alors construit dans l'ordre les points A, G, O_1, O, O_2, E, C, I, B, D, F, H et J avant de compléter le cube.

Remarque : la section du cube avec le plan passant par A et parallèle au plan frontal est le rectangle ACGE. Si on appelle C' et E' les projetés orthogonaux de C et E sur la droite Δ perpendiculaire à (AG) dans le plan décrit ci-dessus, on obtient la figure ci-contre :



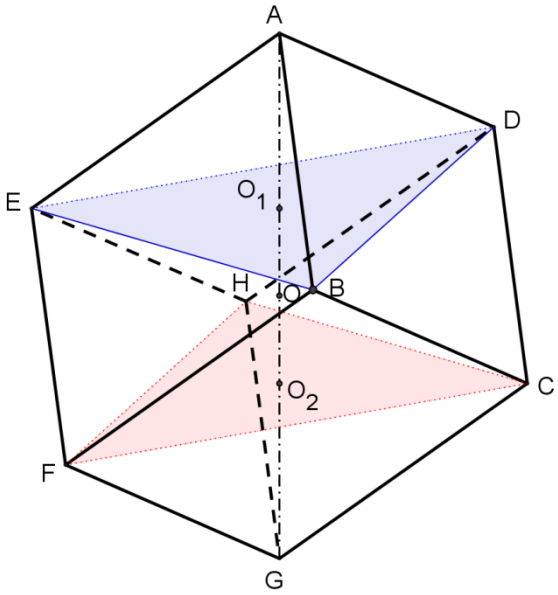
θ et θ' sont deux angles complémentaires, donc

$\cos\theta = \sin\theta' = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Par suite, GC' = $a\frac{\sqrt{6}}{3}$

De plus, O est le milieu de [CE] , donc G est le milieu de [C'E'].

En conclusion, voici la représentation du cube en position γ avec en pointillés la diagonale [AG] verticale. Les triangles équilatéraux BDE et CFH (en couleur) ont pour centres respectifs O_1 et O_2 et sont inclus dans des plans horizontaux.



II. Lignes et surfaces de niveau

1) Lignes de niveau

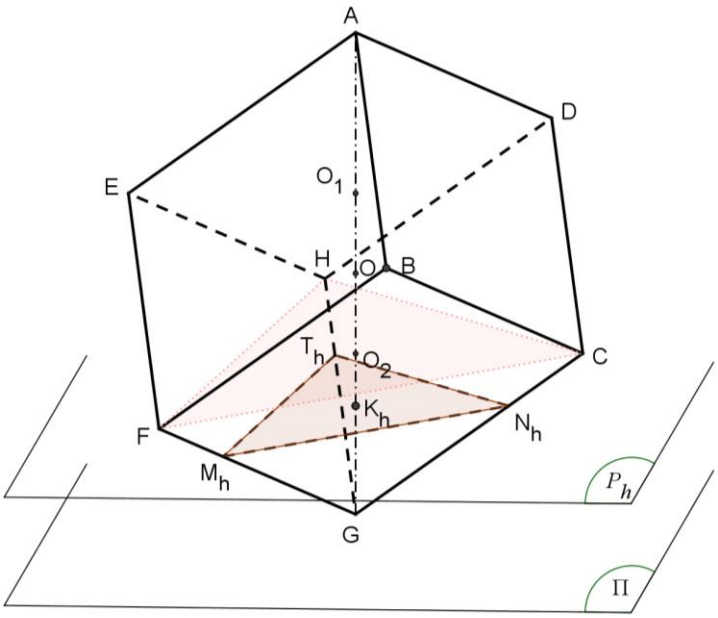
Désignons par (Σ) la surface constituée des six carrés « pleins » du cube.

Π est le plan horizontal passant par G et P_h est le plan horizontal situé à la distance h du plan Π, situé dans le demi-espace de frontière Π contenant le cube. Les plans P_0 et Π sont confondus .

Les lignes de niveau notées L_h sont les sections de (Σ) par la famille de plans horizontaux P_h,

h étant un réel de l'intervalle $[0 ; \sqrt{3}]$.

Notons K_h l'intersection du plan P_h avec (AG) :
on a alors $GK_h = h$.



La famille de plans P_h est une famille de plans orthogonaux à (AG).

L'intersection de P_h et de (Σ) est non vide si et seulement si $h \in [0 ; a\sqrt{3}]$.

Trois cas sont alors à envisager :

- **1er cas : si $h \in \left[0 ; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right]$**

P_h est alors situé entre les plans horizontaux Π et (FCH). P_h ne coupe alors que les trois faces BCDF, CDHG et EFGH du cube.
Les intersections d'un plan avec deux plans parallèles sont deux droites parallèles.
Il en résulte que :

- L'intersection de P_h avec la face BCGF du cube est un segment $[M_hN_h]$ parallèle à (CF).
- L'intersection de P_h avec la face CDHG du cube est un segment $[N_hT_h]$ parallèle à (CH).
- L'intersection de P_h avec la face EFGH du cube est le segment $[T_hM_h]$ parallèle à (HF).

Ainsi, L_h est un triangle $M_hN_hT_h$ tel que $M_h \in [FG]$, $N_h \in [GC]$ et $T_h \in [GH]$.

A l'aide du théorème de Thalès, on montre les égalités suivantes :

$$\frac{GK_h}{GO_2} = \frac{GM_h}{GF} = \frac{M_hN_h}{FC} = \frac{N_hT_h}{CH} = \frac{T_hM_h}{FH} = \frac{h}{a\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{a}$$

Il en résulte que : $M_hN_h = N_hT_h = T_hM_h = \frac{h\sqrt{3}}{3a} \times a\sqrt{2} = h\sqrt{6}$

Ainsi, le triangle $M_hN_hT_h$ est un triangle équilatéral de côté $h\sqrt{6}$.

Remarquons que ce triangle $M_hN_hT_h$ est image du triangle équilatéral FHI par une homothétie de centre G

Lorsque $h \in \left[0 ; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right]$, la ligne de niveau L_h est un triangle équilatéral de côté $h\sqrt{6}$.

Remarque : la ligne de niveau $L_{a\frac{\sqrt{3}}{3}}$ est le triangle équilatéral CFH et L_0 est réduite au point G

❖ **2e cas : si $h \in \left]\frac{a\sqrt{3}}{3}\ ;\ \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right[$**

P_h est alors situé entre les plans horizontaux (FCH) et (BED). P_h coupe alors les six faces du cube.

Les trois plans horizontaux P_h , (BDE) et (CFH) sont parallèles et tous trois sont orthogonaux à (AG) . En utilisant que les intersections de deux plans parallèles avec un troisième plan sont deux droites parallèles, on prouve que :

- L'intersection de P_h avec la face ABCD du cube est un segment [αβ] parallèle à (BD).
- L'intersection de P_h avec la face DCGH du cube est le segment [βγ] parallèle à (CH).
- L'intersection de P_h avec la face AEHD du cube est le segment [γδ] parallèle à (DE).
- L'intersection de P_h avec la face EFGH du cube est le segment [δε] parallèle à (FH).
- L'intersection de P_h avec la face ABFE du cube est le segment [εω] parallèle à (BE).
- L'intersection de P_h avec la face BCFG du cube est le segment [ωα] parallèle à (CF).

L_h est alors un hexagone.

Appelons M_h l'intersection du segment [GA] avec le plan P_h et posons :

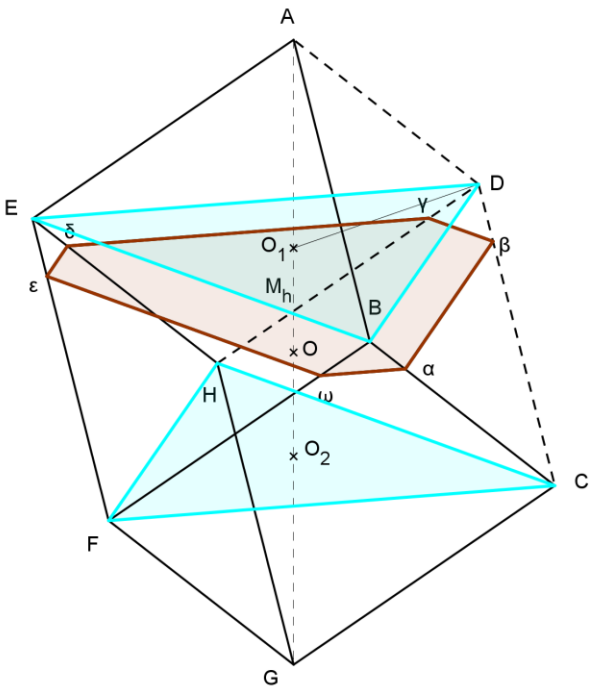
$k = \frac{O_2M_h}{O_2O_1} = \frac{h-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{a} - 1.$

O_2, M_h et O_1 sont les projetés orthogonaux respectifs de C, α et B sur la droite (GA), donc $\frac{C\alpha}{CB} = k$ et par le théorème de Thalès $\frac{\alpha\beta}{BD} = k$. On en déduit : $\alpha\beta = ka\sqrt{2}$

De même, O_2, M_h et O_1 sont les projetés orthogonaux respectifs de C, β et D sur la droite (GA),

donc $\frac{D\beta}{DC} = \frac{O_1M_h}{O_1O_2} = \frac{O_1O_2 - O_2M_h}{O_1O_2} = 1 - k = \frac{\beta\gamma}{CH}$. D'où $\beta\gamma = (1-k)a\sqrt{2}$

On obtient finalement $\gamma\delta = \varepsilon\omega = \alpha\beta = ka\sqrt{2}$ et $\delta\varepsilon = \omega\alpha = \beta\gamma = (1-k)a\sqrt{2}$



Remarquons que la somme de deux côtés consécutifs de l'hexagone est constante et égale à $a\sqrt{2}$, que le périmètre de cet hexagone est donc constant et égal à 3 $a\sqrt{2}$ et enfin que les côtés opposés sont deux à deux parallèles, soit (αβ), (βγ) et (γδ) respectivement parallèles à (δω), (ωε) et (εα)

Remarquons également que pour $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, on a $k = \frac{1}{2}$, les points α, β, γ, δ, ε, ω sont les milieux des côtés [BC],[CF], [FE], [EH], [HD] et [DB]. L'hexagone est alors régulier.

En conclusion, lorsque $h \in \left]\frac{a\sqrt{3}}{3}\ ;\ \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right[$, la ligne de niveau L_h est un hexagone dont les côtés sont trois à trois de même longueur.

❖ **3e cas : si $h \in \left[\frac{2a\sqrt{3}}{3} ; a\sqrt{3}\right]$**

P_h est alors situé au-dessus du plan horizontal (BDE) et au-dessous du sommet A. P_h ne coupe alors que les trois faces ABCD, ABEF et ADHE du cube.

Le plan P_h est le symétrique du plan $P_{a\sqrt{3}-h}$ par rapport au centre O du cube, donc l'intersection de ce plan avec le cube est symétrique de la ligne de niveau $a\sqrt{3}-h$ avec $a\sqrt{3}-h \in \left[0 ; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right]$.

Cette ligne de niveau est un triangle équilatéral dont la longueur du côté est :

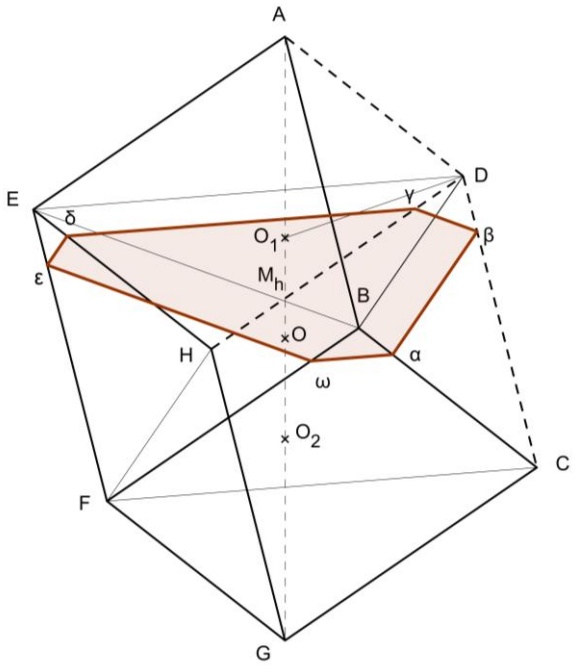
$$\left(a\sqrt{3}-h\right) \times \sqrt{6} = 3a\sqrt{2} - h\sqrt{6}$$

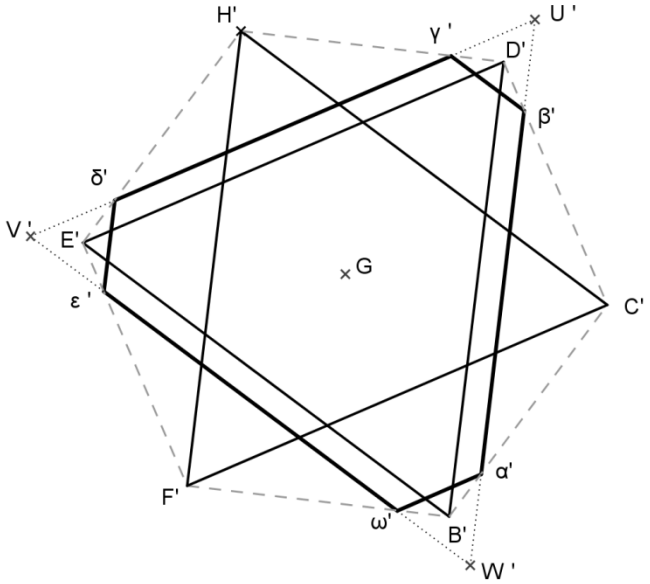
En conclusion, la ligne de niveau L_h est un triangle équilatéral de côté $3a\sqrt{2} - h\sqrt{6}$.

2) Surfaces de niveau

Les surfaces de niveau considérées sont les sections du cube plein avec une famille de plans horizontaux. Elles sont délimitées par les lignes de niveau définies précédemment.

- si $h \in \left[0 ; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right]$ ou si $h \in \left[\frac{2a\sqrt{3}}{3} ; a\sqrt{3}\right]$, les surfaces de niveau sont des triangles équilatéraux pleins dont on a déjà déterminé la longueur du côté.
- si $h \in \left]\frac{a\sqrt{3}}{3} ; \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right[$, les surfaces de niveau sont des hexagones pleins dont certaines propriétés ont été étudiées dans le paragraphe précédent.





Projetons orthogonalement cet hexagone sur le plan horizontal Π. Projetons de même les deux triangles équilatéraux BDE et CFH. Ces trois lignes de niveau sont alors obtenues en vraie grandeur puisqu'elles sont situées dans des plans parallèles à Π

Les points A, O_1, O, O_2 et G ont pour projeté G. De plus, comme les triangles BDE et CFH sont symétriques par rapport à O, les triangles projetés sont symétriques par rapport à G.

Appelons U' le point d'intersection des droites (α'β') et (γ'δ'), V' le point d'intersection des droites (ε'ω') et (γ'δ') et W' le point d'intersection des droites (α'β') et (ε'ω').
Les triangles α'ω'W', β'γ'U' et δ'ε'V' sont des triangles équilatéraux puisque leurs côtés sont respectivement parallèles aux côtés du triangle équilatéral C'F'H'. D'après le paragraphe précédent, ils sont d'ailleurs isométriques. Le triangle U'V'W' est également équilatéral.

En conclusion, l'hexagone α'β'γ'δ'ε'ω' peut s'obtenir en retirant d'un triangle équilatéral de côté (α'β'+2 β'γ') trois triangles équilatéraux de côté β'γ'.

III. Fonctions associées

Nous étudierons successivement les fonctions associées respectivement à la longueur des lignes de niveaux, à l'aire des surfaces de niveaux et au volume de liquide contenu.

1) Longueur des lignes de niveau

La longueur de la ligne de niveau L_h peut s'exprimer en fonction de la hauteur h de liquide contenu.

Notons $\mathcal{L}$ la fonction, qui à tout réel h de l'intervalle $[0 ; a]$, associe la longueur de la ligne de niveau L_h.

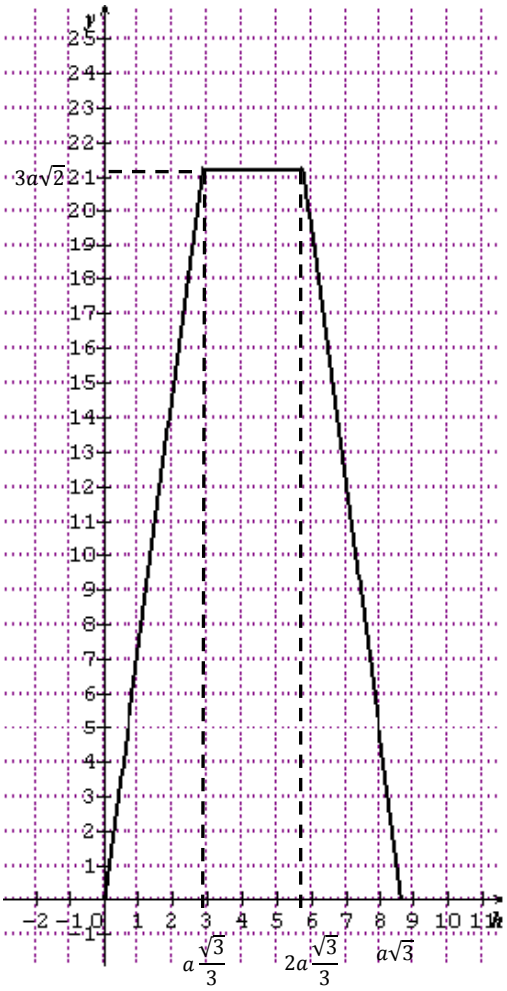
L'étude précédente des lignes de niveau nous permet de déterminer la fonction $\mathcal{L}$ pour tout h de $[0 ; a\sqrt{3}]$:

Lorsque $h \in \left[0 ;\ a\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, $\boldsymbol{\mathcal{L}(h) = 3h\sqrt{6}}$

Lorsque $h \in \left]a\frac{\sqrt{3}}{3} ; 2a\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, $\boldsymbol{\mathcal{L}(h) = 3a\sqrt{2}}$

Lorsque $h \in \left[2a\frac{\sqrt{3}}{3} ;\ a\sqrt{3}\right]$, $\boldsymbol{\mathcal{L}(h) = 3\sqrt{6}(a\sqrt{3} - h)}$

La fonction longueur est affine par intervalles sur [0 ; *a*].



Représentation graphique avec $a = 5$

2) Aire des surfaces de niveau

L'aire des surfaces de niveau est une fonction de la hauteur h de liquide contenu.

Notons $\boldsymbol{S}$ la fonction qui, à tout réel h de l'intervalle [0 ; a], associe l'aire de la surface de niveau associée à L_h.

$\boldsymbol{S}$ est définie pour tout h de [0 ; a] de la façon suivante:

- Lorsque $h \in \left[0\ ;\ a\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, la surface de niveau h est un triangle équilatéral de côté $h\sqrt{6}$.
  Son aire est :
  $\boldsymbol{S(h)} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} h\sqrt{6} \times h\sqrt{6}$
  $\boldsymbol{S(h) = \frac{3\sqrt{3}}{2} h^2}$

- Lorsque $h \in \left]a\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ 2a\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, la surface de niveau h est un hexagone. Nous avons vu précédemment que cet hexagone α'β'γ'δ'ε'ω' peut s'obtenir en retirant d'un triangle équilatéral de côté (α'β'+2 β'γ') trois triangles équilatéraux de côté β'γ'.

  Nous avons β'γ' = βγ = $(1 - k)a\sqrt{2}$, α'β' = αβ = $ka\sqrt{2}$ avec $k = \frac{h\sqrt{3}}{a} - 1$
  En remplaçant k par cette dernière valeur, nous obtenons
  α'β' + 2β'γ' = $3a\sqrt{2} - h\sqrt{6}$ et β'γ' = $2a\sqrt{2} - h\sqrt{6}$

  On a alors $\boldsymbol{S(h)} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(3a\sqrt{2} - h\sqrt{6}\right)^2 - 3\left(2a\sqrt{2} - h\sqrt{6}\right)^2\right)$

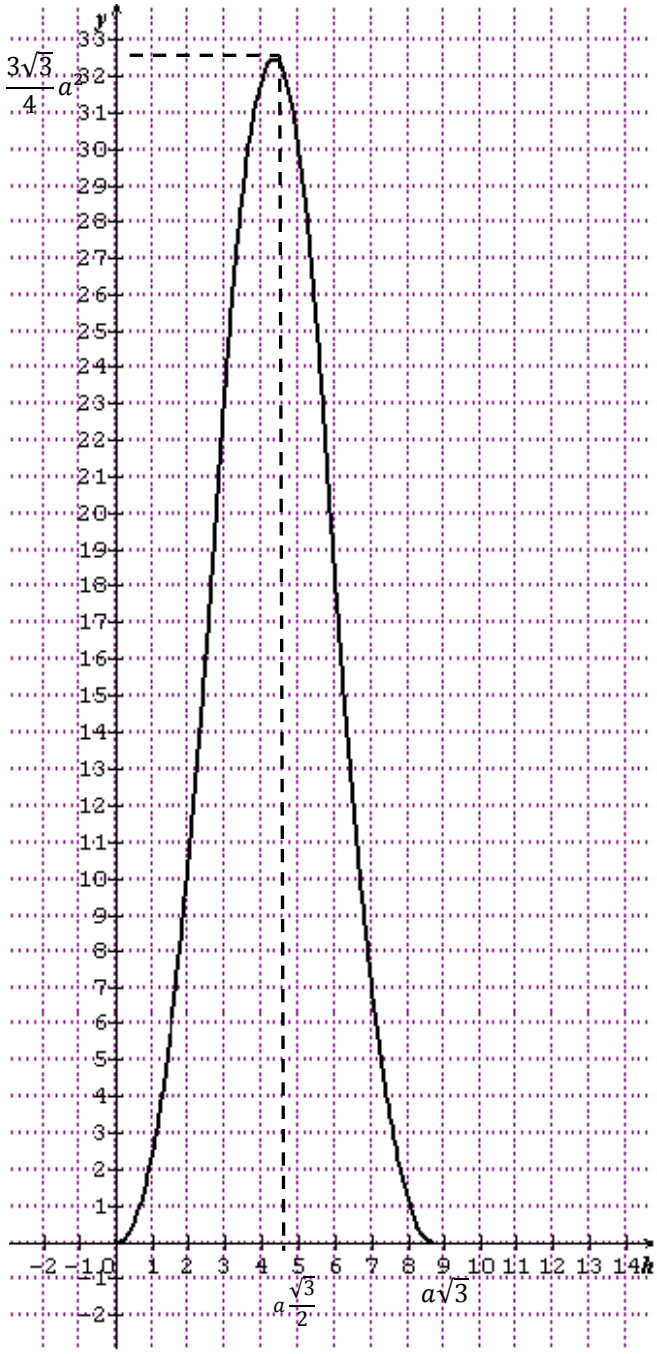
  Après développement, nous obtenons alors $\boldsymbol{S(h)} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-6a^2 - 12h^2 + 12ah\sqrt{3}\right)$

  $\boldsymbol{S(h)} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(-2a^2 - 4h^2 + 4ah\sqrt{3}\right)$
  Soit enfin $\boldsymbol{S(h) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(a^2 - \left(2h - a\sqrt{3}\right)^2\right)}$

- Lorsque $h \in \left[2a\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ a\sqrt{3}\right]$, la surface de niveau h est un triangle équilatéral isométrique à la surface de niveau $a\sqrt{3} - h$ et d'aire :
  $\boldsymbol{S(h) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a\sqrt{3} - h\right)^2}$

La fonction aire est définie sur [0 ; *a*] par intervalles à l'aide de polynômes de degré 2.

On remarquera qu'elle atteint son maximum lorsque $\boldsymbol{h = a\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et que ce maximum a pour valeur $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}$.
Cette fonction est continue et dérivable sur [0 ; *a*] (les trois arcs se raccordent tangentiellement) D'autre part, la droite d'équation $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ est axe de symétrie de la courbe
Rappelons que pour cette valeur de *h*, la surface de niveau est un hexagone régulier.



Représentation graphique avec *a* = 5

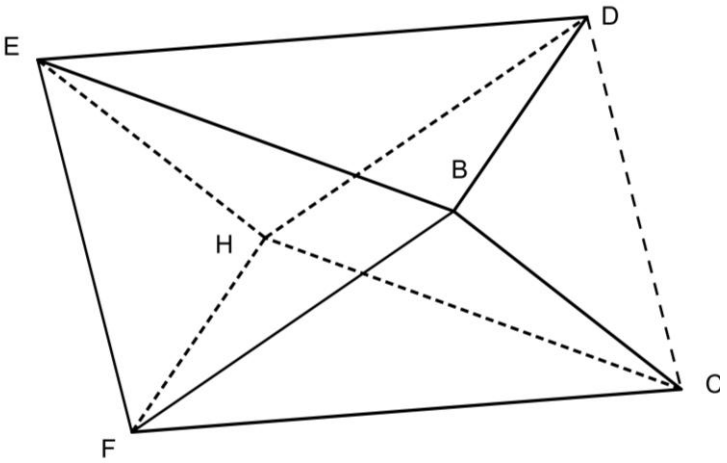
3) Volume des solides associés

Le volume des solides associés au remplissage peut aussi s'exprimer en fonction de la hauteur h de liquide contenu.
φ est la fonction, qui à tout réel h de l'intervalle [0 ; a], associe le volume v contenu dans le cube.

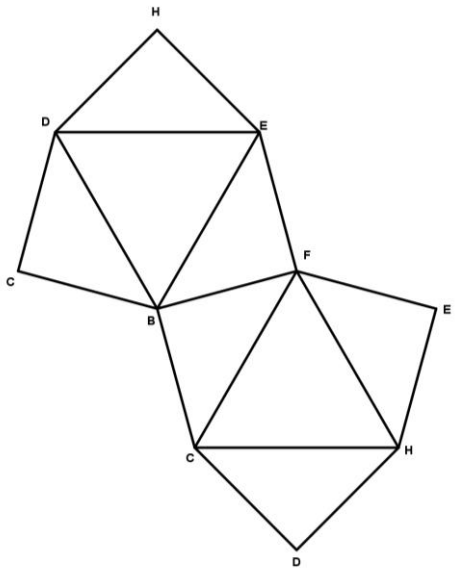
- 1er cas : $h \in [0\ ;\ a\frac{\sqrt{3}}{3}]$ le solide associé est un tétraèdre dont une face est un triangle équilatéral de côté $h\sqrt{6}$ et dont la hauteur correspondante est h.
  Le volume est donc $\varphi\ (h) = \frac{1}{3}h\frac{3\sqrt{3}}{2}h^2$
  $$\varphi\ (\boldsymbol{h}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{h}^3$$
- 2nd cas : $h \in [a\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ 2a\frac{\sqrt{3}}{3}]$
  le solide associé est la réunion d'un tétraèdre et d'un tronc d'antiprisme, de volume
  $$\varphi\ (\boldsymbol{h}) = \frac{1}{6}\boldsymbol{a}^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{a}\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{3}{2}\boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{a}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{a}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$$

Le solide CFHDBE est un antiprisme droit. Rappelons la définition d'un antiprisme :
Un antiprisme d'ordre n (ou n-gonal) est un polyèdre ayant deux faces parallèles (ses bases) à n côtés, chacun des sommets de l'une étant joint par deux arêtes à deux sommets de l'autre, formant ainsi $2n$ faces latérales triangulaires.
CFHBDE compte 6 sommets, 8 faces et 12 arêtes.
Les deux bases sont les faces BED et CFH. Ce sont des triangles équilatéraux de côté de longueur $\sqrt{2}$, symétriques par rapport à O (donc situés dans deux plans horizontaux parallèles)
La surface latérale est constituée de six faces isométriques. Ce sont des triangles rectangles isocèles de côté de longueur a et d'hypoténuse de longueur $a\sqrt{2}$.

Représentation en perspective cavalière de l'antiprisme CFHDBE



Un patron de l'antiprisme CFHDBE.



Démontrons le résultat concernant le volume $\varphi\ (h)$

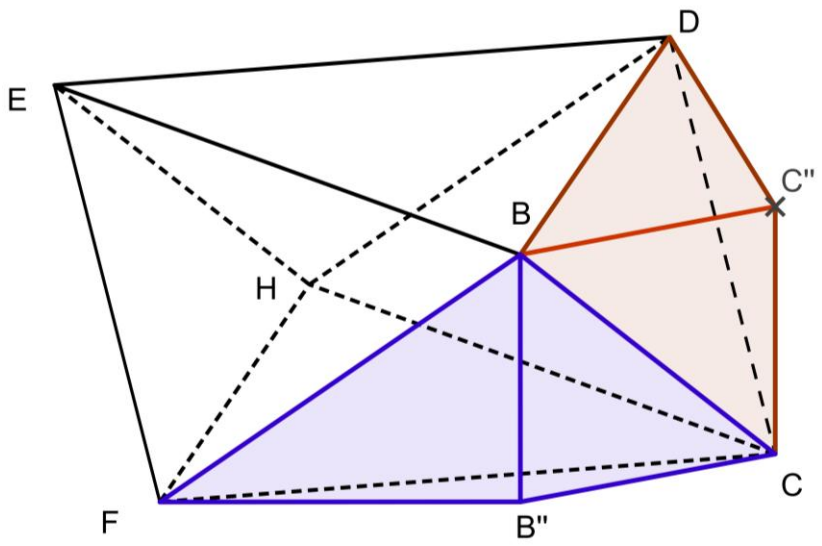
Le tétraèdre trirectangle GCFH a une face qui est un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ et dont la hauteur correspondante est $a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

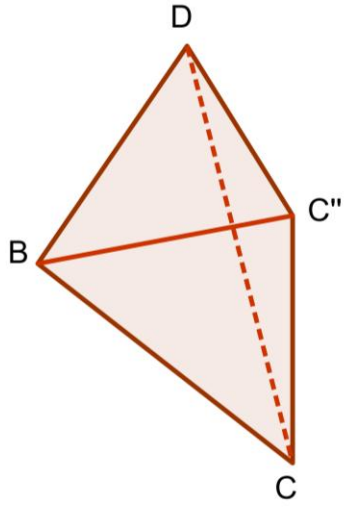
Son volume est donc $\frac{1}{3}(a\frac{\sqrt{3}}{3})\frac{\sqrt{3}}{4}2a^2$, soit $\frac{1}{6}a^3$

Le cube, de volume a^3, est la réunion de cet antiprisme et de deux tétraèdres GCFH et AEBD de volume $\frac{1}{6}a^3$. Par différence, le volume de l'antiprisme vaut donc $\frac{2}{3}a^3$

Remarquons qu'en juxtaposant sur chacune des 6 faces de la surface latérale un même tétraèdre (trois tétraèdres dans la position 1 et trois tétraèdres dans la position 2), nous obtenons un prisme dont la base est un hexagone régulier dont le côté est de longueur $a\frac{\sqrt{6}}{3}$ et dont la hauteur est $a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

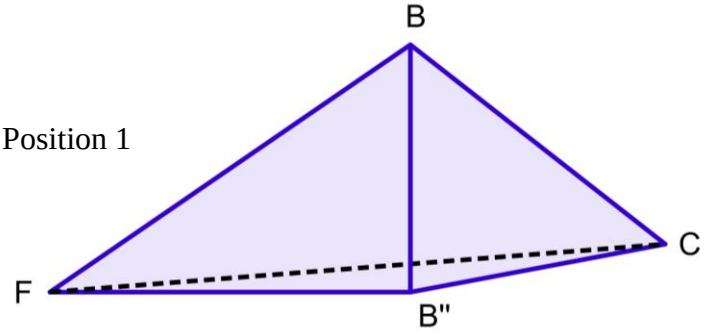
Le volume de ce prisme est $6(\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{2}{3}a^2)\ (a\frac{\sqrt{3}}{3})$, soit a^3.

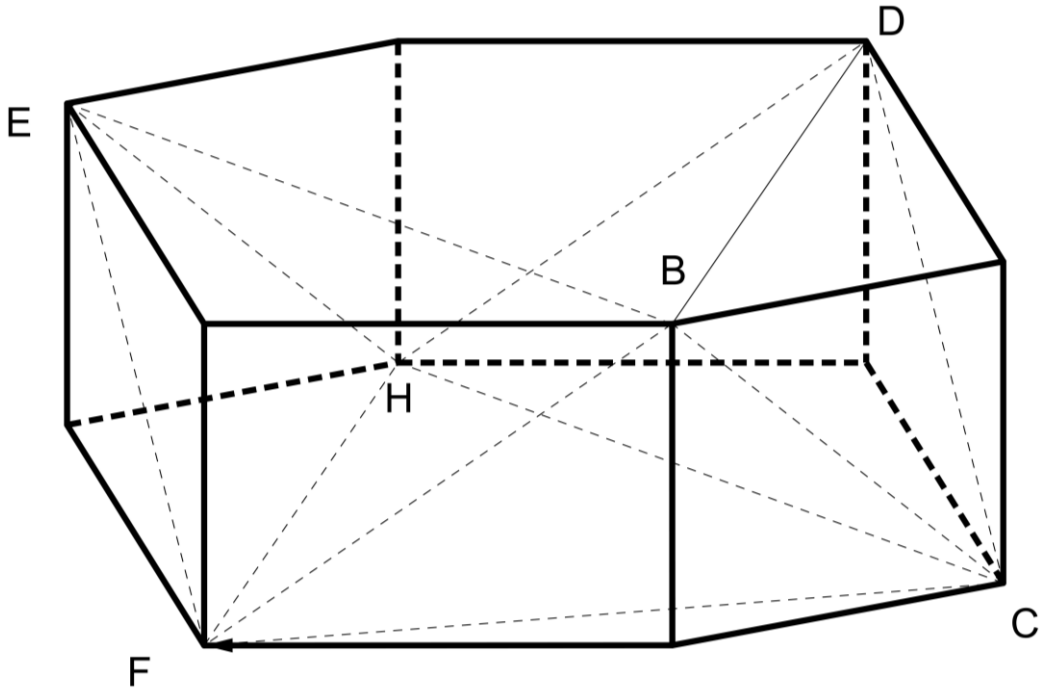




Position 2

Position 1





Le prisme à base hexagonale, obtenu en complétant l'antiprisme CFHDBE

Les dimensions du tétraèdre permettant de compléter l'antiprisme, se calculent à l'aide du patron ci-contre :

En position 2 :

BC = CD = a (arête du cube)

BD = $a\sqrt{2}$

BC'' = C''D = $a\frac{\sqrt{6}}{3}$,

CC'' = $a\frac{\sqrt{3}}{3}$

C''K = $a\frac{\sqrt{6}}{6}$ (K milieu de [DB])

En position 1 :

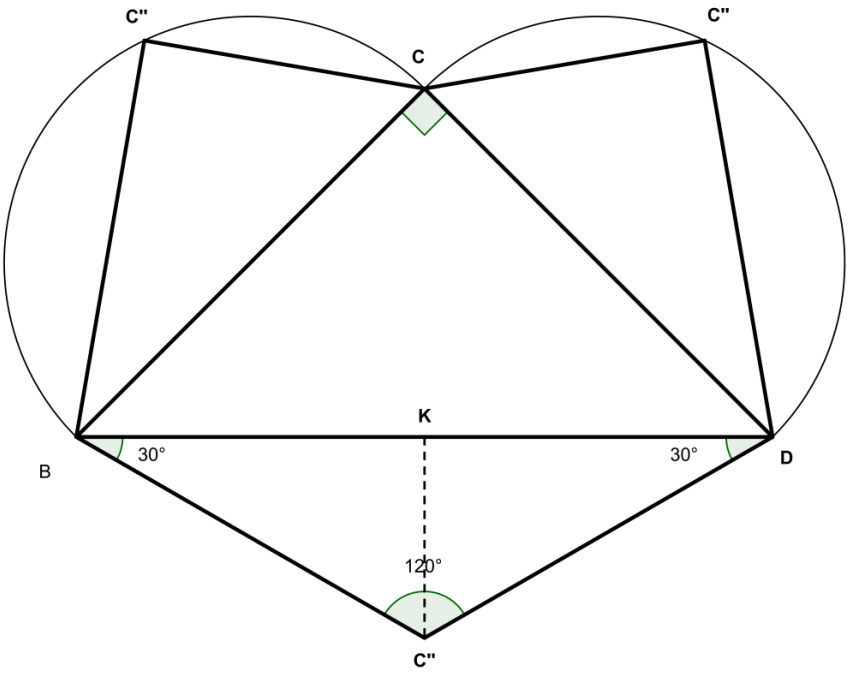
BC = BF = a (arête du cube)

FC = $a\sqrt{2}$

B''F = B''C = $a\frac{\sqrt{6}}{3}$

BB'' = $a\frac{\sqrt{3}}{3}$

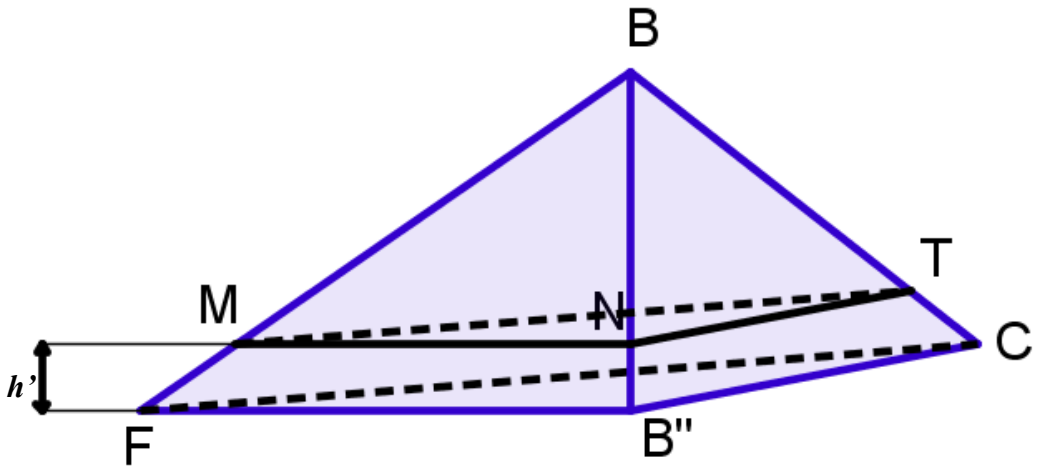
B''K' = $a\frac{\sqrt{6}}{6}$ (K' milieu de [CF])



Nous cherchons le volume d'un tronc d'antiprisme de base le triangle équilatéral CFH et de hauteur h' avec $h' = h - a\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Ce solide s'inscrit dans un prisme dont la base est un hexagone régulier dont le côté est de longueur $a\frac{\sqrt{6}}{3}$ et dont la hauteur est h'. Le volume de ce prisme est $a^2\sqrt{3}\,h'$ La surface du liquide remplissant le cube détermine sur le tétraèdre en position 1 un tronc de pyramide.

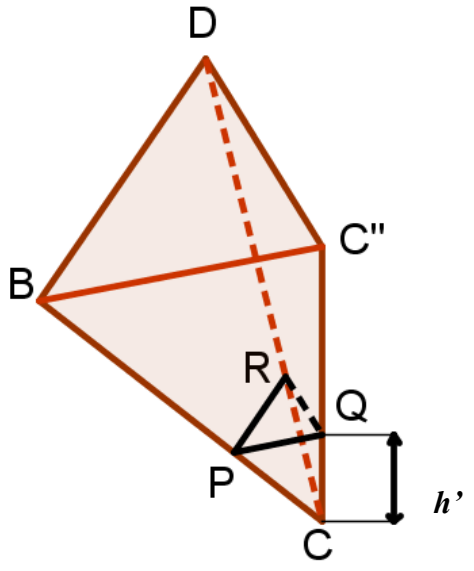
Calculons le volume de ce tronc de pyramide MNTFB'C

le triangle FB'C a pour aire $\frac{1}{2}(a\sqrt{2})\frac{a\sqrt{6}}{6}$, soit $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$
Le volume du tétraèdre FB'CB est alors $\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\frac{a\sqrt{3}}{3}$, soit $\frac{a^3}{18}$
Le tétraèdre MNTB se déduit du précédent par l'homothétie de centre B et de rapport k_1 avec $k_1 = \frac{BN}{BB'}$, soit $k_1 = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{3}-h'}{a\frac{\sqrt{3}}{3}}$, soit $k_1 = \frac{a-h'\sqrt{3}}{a}$
MNTB a alors pour volume $(k_1)^3\frac{a^3}{18}$ et
MNTFB'C a pour volume $\frac{1}{18}\left(a^3 - \left(a - h'\sqrt{3}\right)^3\right)$



La surface du liquide remplissant le cube détermine sur le tétraèdre en position 2 un tétraèdre.
Calculons le volume de ce tétraèdre CPQR

le triangle BC''D a pour aire $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$
(d'après le calcul précédent)
Le volume du tétraèdre CFB'B est alors :
$\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\frac{a\sqrt{3}}{3}$, soit $\frac{a^3}{18}$



Le tétraèdre CPQR se déduit du précédent par l'homothétie de centre C et de rapport k_2 avec $k_2 = \frac{CQ}{CC''}$, soit $k_2 = \frac{h'}{a\frac{\sqrt{3}}{3}}$, soit enfin $k_2 = \frac{h'\sqrt{3}}{a}$

CPQR a alors pour volume $(k_2)^3\frac{a^3}{18}$, soit $\frac{h'^3\sqrt{3}}{6}$

Le volume du tronc d'antiprisme FCHαβγδε est alors
$V = a^2\sqrt{3}\,h' - 3\times\frac{1}{18}\left(a^3 - \left(a - h'\sqrt{3}\right)^3\right) - 3\times\frac{h'^3\sqrt{3}}{6}$

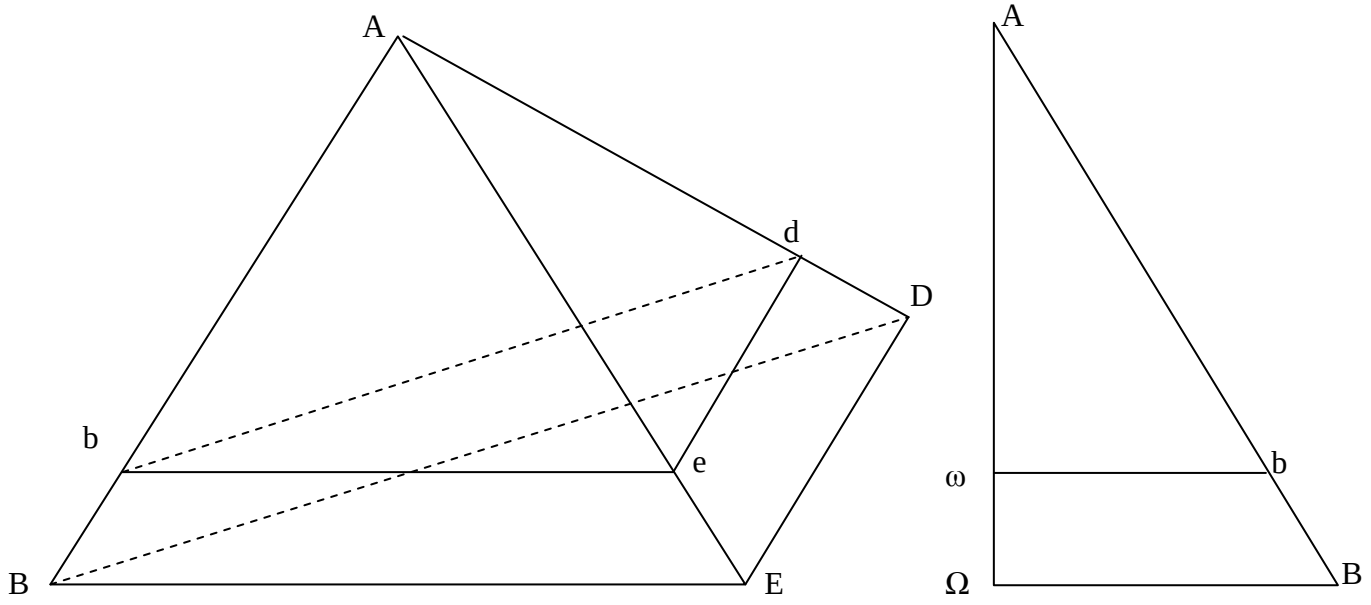
Après développement, nous obtenons $V = \frac{\sqrt{3}}{2}h'a^2 + \frac{3}{2}h'^2a - \sqrt{3}h'^3$

Rappelons que nous avons défini *h' par* $h' = h - a\frac{\sqrt{3}}{3}$ page précédente.
Nous obtenons alors $V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{3}{2}a\left(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \sqrt{3}\left(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$

et enfin, $\boldsymbol{\varphi\ (h) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{3}{2}a\left(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \sqrt{3}\left(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3}$

Remarquons que pour $h = 2a\frac{\sqrt{3}}{3}$, nous avons
$\varphi\ (2a\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2a\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}a\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \sqrt{3}\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$
$\varphi\ (2a\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3$
$\varphi\ (2a\frac{\sqrt{3}}{3}) = a^3 - \frac{1}{6}a^3$ et enfin $\varphi\ (2a\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{5}{6}a^3$
L'avant dernière expression correspond bien au volume du cube privé du tétraèdre trirectangle ABDE.

- lorsque $h \in [2a\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,a\sqrt{3}]$, le solide associé est le cube entier, privé d'un tétraèdre.
  Le volume de liquide est donc égal au volume du cube privé du tétraèdre Abde



Le triangle BDE est équilatéral de côté $a\sqrt{2}$, de centre Ω

BDE et bde sont à côtés parallèles. bde est donc équilatéral, de centre ω.
Le théorème de Thalès fournit $\frac{\omega A}{\omega\Omega} = \frac{\omega b}{\Omega B}$ soit $\frac{\omega b}{\Omega B} = \frac{a\sqrt{3}-h}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$.

Comme ΩB = $\frac{\sqrt{3}}{3}$BD = $a\frac{\sqrt{6}}{3}$, on obtient ωb = $\left(\sqrt{3}a - h\right)\sqrt{2}$
On en déduit alord bd = $\left(\sqrt{3}a - h\right)\sqrt{6}$
Ainsi, l'aire du triangle bde est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times$bd^2, soit $\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}a - h\right)^2$
Le tétraèdre Abde a pour volume $\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}a - h\right)^2 \times \left(\sqrt{3}a - h\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}a - h\right)^3$
On obtient finalement $\boldsymbol{\varphi\ (h) = a^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a\sqrt{3} - h\right)^3}$

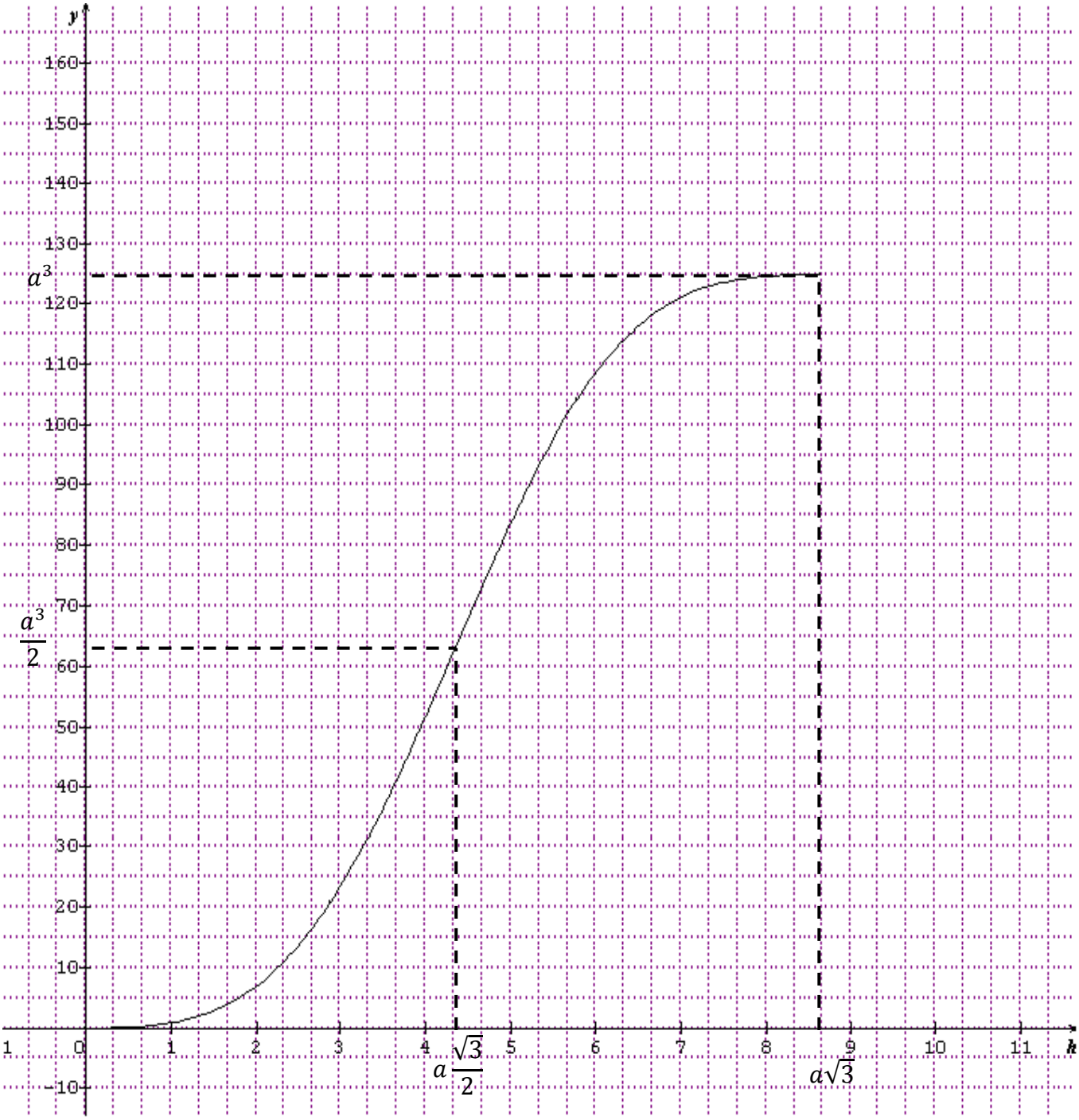
La fonction volume est définie sur [0 ; *a*] par intervalles à l'aide de polynômes de degré 3.

$h \in [0\,;\,a\frac{\sqrt{3}}{3}]$ $\qquad$ $\boldsymbol{\varphi\ (h) = \frac{\sqrt{3}}{2}h^3}$

$h \in [a\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,2a\frac{\sqrt{3}}{3}]$ $\qquad$ $\boldsymbol{\varphi\ (h) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\left(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{3}{2}a\left(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \sqrt{3}\left(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3}$

$h \in [2a\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,a\sqrt{3}]$ $\qquad$ $\boldsymbol{\varphi\ (h) = a^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a\sqrt{3} - h\right)^3}$

La fonction volume est continue et dérivable sur [0 ; a] (les trois arcs se raccordent tangentiellement
D'autre part, le pont de coordonnées $\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a^3}{2}\right)$est centre de symétrie de la courbe



Représentation graphique avec a = 5

Quatrième Partie

Annexes

I. Représentations en perspective cavalière

1) La perspective cavalière

Pour représenter un objet de l'espace dans un plan, on peut utiliser différentes perspectives ; celle qui est habituellement utilisée en cours de mathématiques au collège et au lycée s'appelle la **perspective cavalière**.

a) Quelques règles de dessin en perspective cavalière

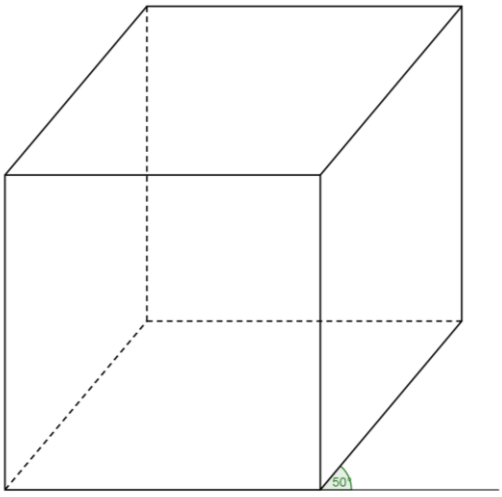
(*i*) Toute figure contenue dans un plan frontal (c'est-à-dire parallèle au plan de projection) est représentée en vraie grandeur (compte tenu de l'échelle).
(*ii*) Les droites perpendiculaires au plan de projection sont représentées par des droites qui font toutes le même angle avec l'horizontale du plan de projection (celui-ci étant supposé vertical). Cet angle est appelé « angle de fuite ».
(*iii*) Tout segment de longueur d porté par une droite perpendiculaire au plan de projection est représenté par un segment de longueur d' telle que le quotient d'/d soit égal à une constante appelée « coefficient de réduction ».

Exemple : représentation en perspective cavalière d'un cube d'arête 4 cm

choix du plan frontal :
un plan vertical contenant une face

choix de l'angle de fuite :
$\alpha = 50°$

choix du coefficient de réduction :
$k = 0,7$



b) Autres propriétés de la perspective cavalière

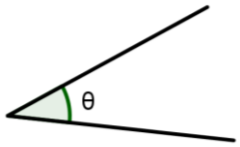
Deux droites parallèles de l'espace sont représentées par deux droites parallèles.
Les proportions sur un segment sont conservées (en particulier, le milieu d'un segment reste au milieu). La perspective cavalière conserve aussi les rapports de longueurs sur des segments parallèles.
Les arêtes cachées d'un solide sont représentées en pointillés.

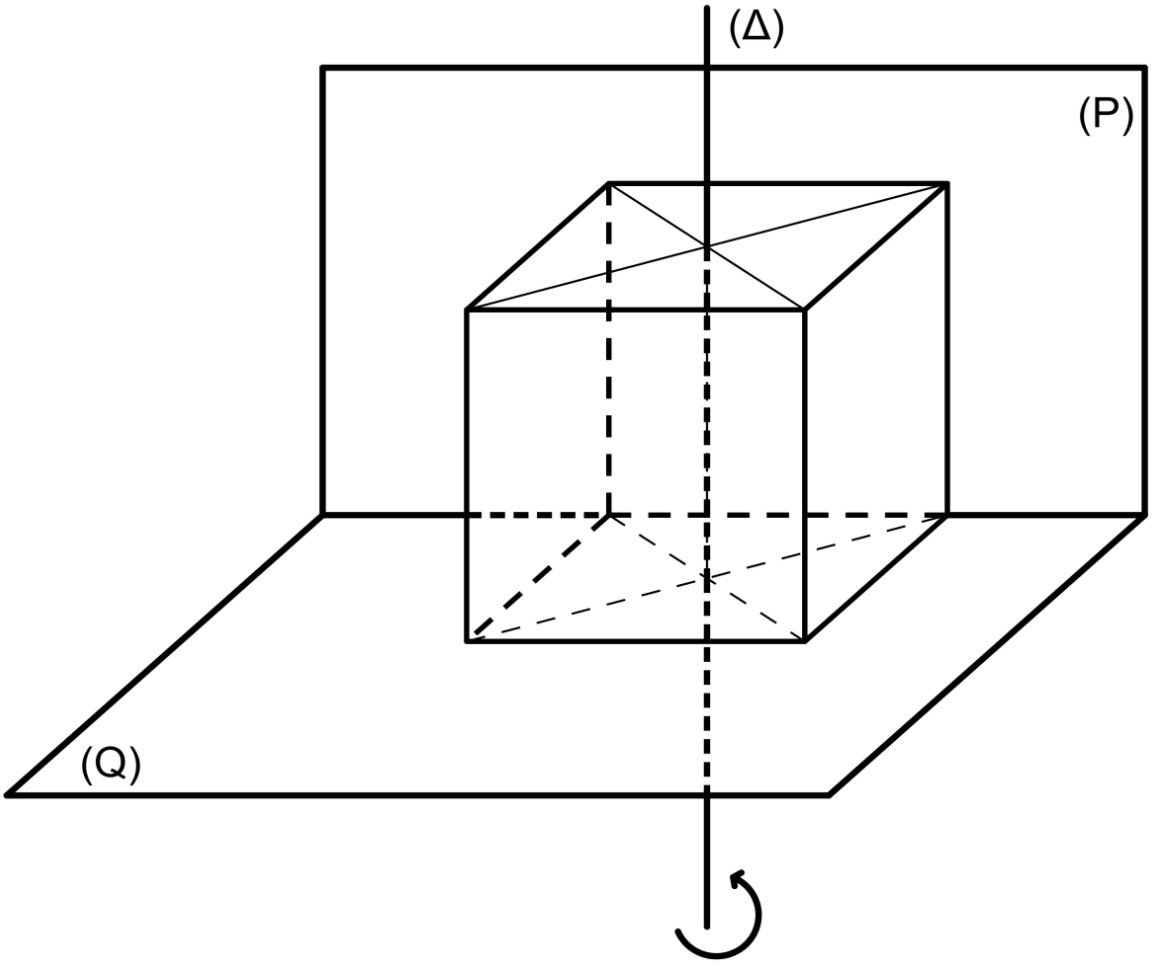
2) Variante de la position α

Nous partons d'un cube d'arête *a* dessiné en perspective cavalière dans la position α. Une des faces du cube est incluse dans le plan frontal (P) et une des faces du cube est incluse dans le plan horizontal (Q).
Ces deux plans sont perpendiculaires. Leur droite d'intersection contient l'arête du cube, commune aux deux faces précédentes.
Nous noterons (Δ) la droite passant par les centres des deux faces horizontales.

Problème : Représenter en perspective cavalière le cube ayant subi la rotation notée *r* d'axe (Δ), et d'angle donné θ.

L'angle θ est donné par une de ses représentations dans le plan.
θ est un réel de [0 ; π/2]
L'unité d'angle est le radian.





a) Analyse de la configuration dans le plan (Q)

Dans le plan horizontal (Q), l'image du carré ABCD de centre I par la rotation r est le carré A'B'C'D', de même centre I.
r_Q, rotation de centre I, d'angle θ dans le plan (Q) est la restriction de r à Q ; le point I étant l'intersection de (Δ) et (Q).
Dans le plan (Q), nous avons :
$r_Q(A) = A'$ $r_Q(B) = B'$ $r_Q(C) = C'$ $r_Q(D) = D'$ (voir figure 1)

Dans la vue en perspective, nous savons que
1) les rapports de distances sont conservés
2) Les segments [AB] et $[AA_1]$seront représentés en vraie grandeur, donc nous supposons déjà construits les points A, B, C, D, I et A_1

b) Construction

Etape 1 : Construction de A' (voir figure 2)
Par un report de distance, on construit en figure 2 deux points α et β tels que I, α et β soient alignés dans cet ordre et tels que le rapport $\frac{I\alpha}{I\beta}$ soit égal au rapport $\frac{IA_1}{IA'}$.
(ces distances IA_1 et IA' étant représentées en vraie grandeur en figure 1)
Par une application du théorème de Thalès, nous construisons en figure 2 le point A' , intersection de la parallèle à (αA_1) passant par β et de (IA_1)

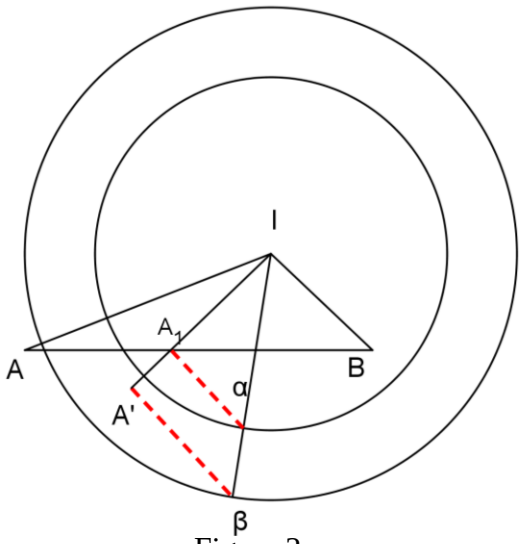


Figure 2

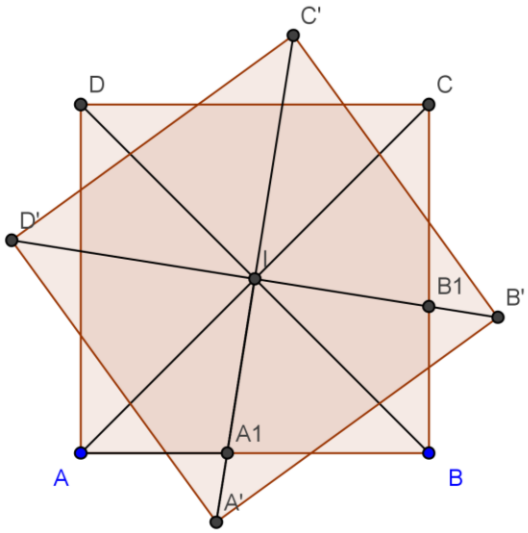


Figure 1

Remarque : On peut démontrer (en utilisant le théorème de Thalès) que

$$\frac{AA_1}{AB} = \frac{\sqrt{2}\,sin(\theta)}{2(cos(\theta) + sin\,(\theta))}$$

Etape 2 : construction de B_1 (figure 3)
Sur les perpendiculaires à (BC) passant par B et C, on construit respectivement les points E et H obtenus en reportant à partir de la figure 1 les distances en vraie grandeur BB_1 et CB_1. Les droites (CH) et (BE) sont alors parallèles, le point B_1 est à l'intersection de (HE) et (BC).

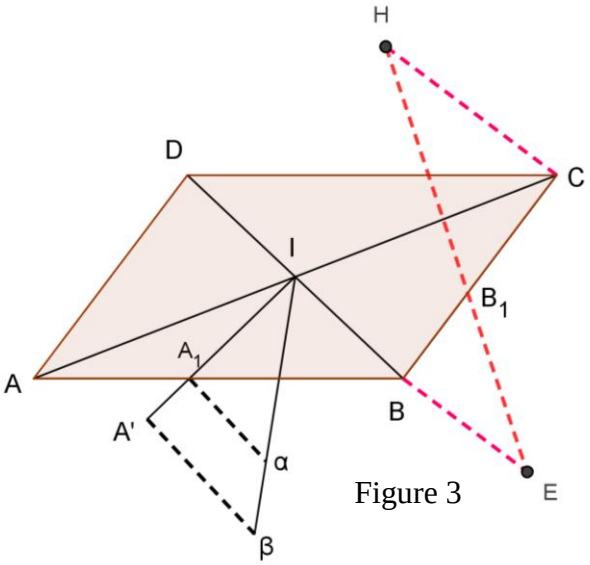


Figure 3

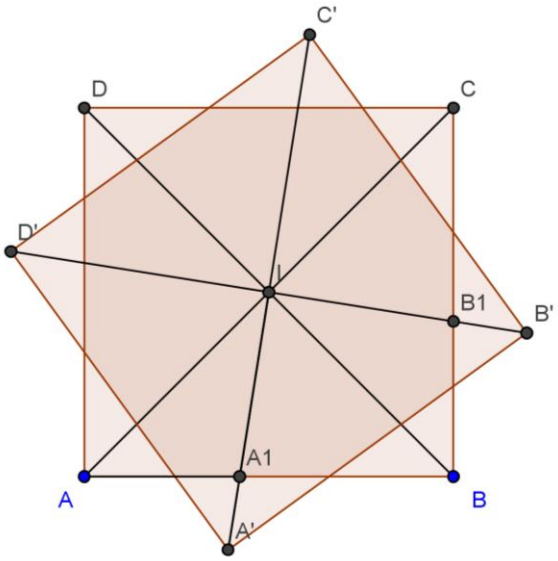


Figure 1

Etape 3 : construction de B', C' et D'

L'égalité des rapports $\frac{IA_1}{IA'}$ et $\frac{IB_1}{IB'}$, l'alignement dans cet ordre de I, B_1 et B' permet de construire B' avec une troisième construction de Thalès (figure 4). Les points C' et D' sont alors construits comme symétriques de A' et B' par rapport à I.

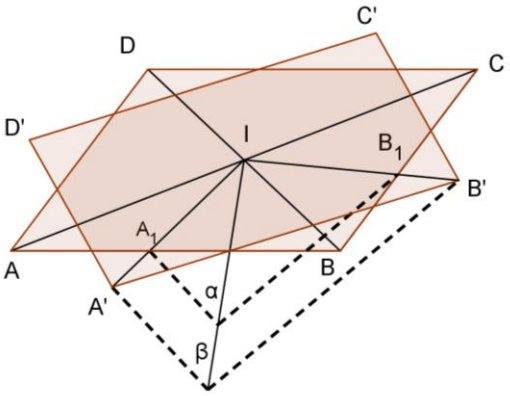


Figure 4

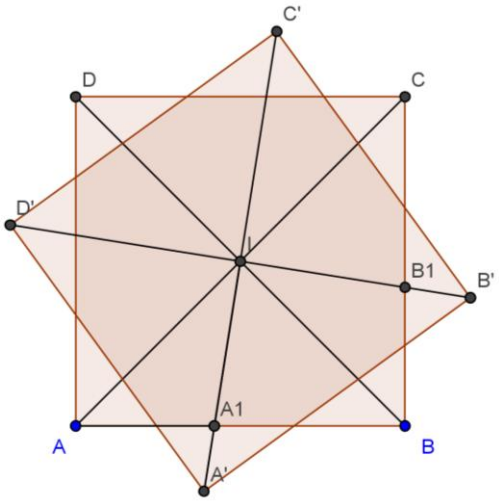
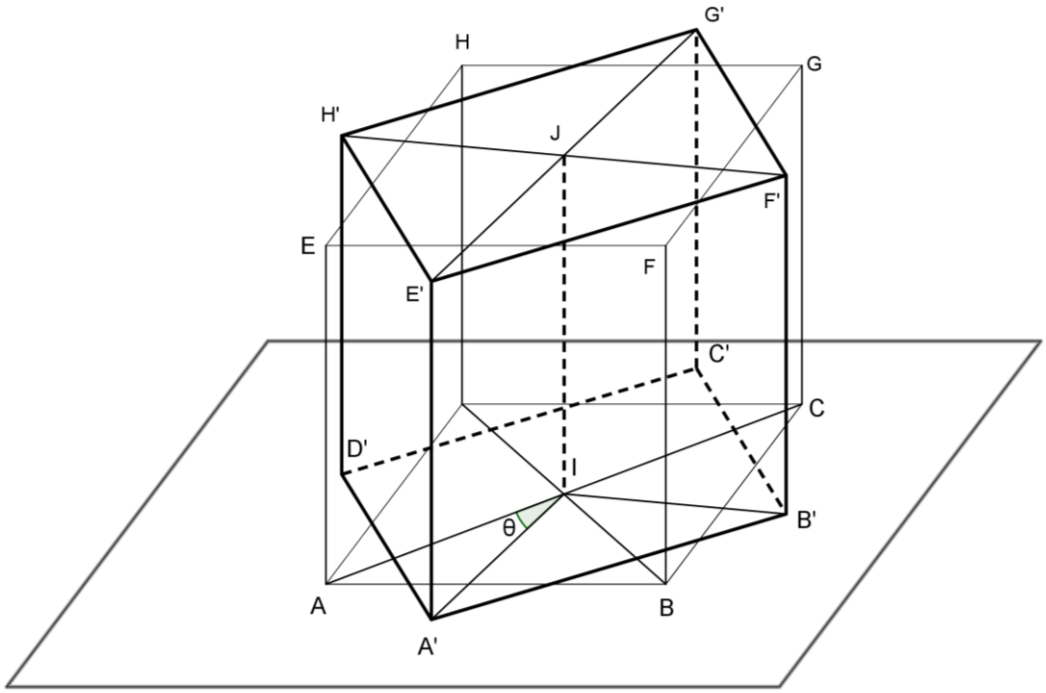


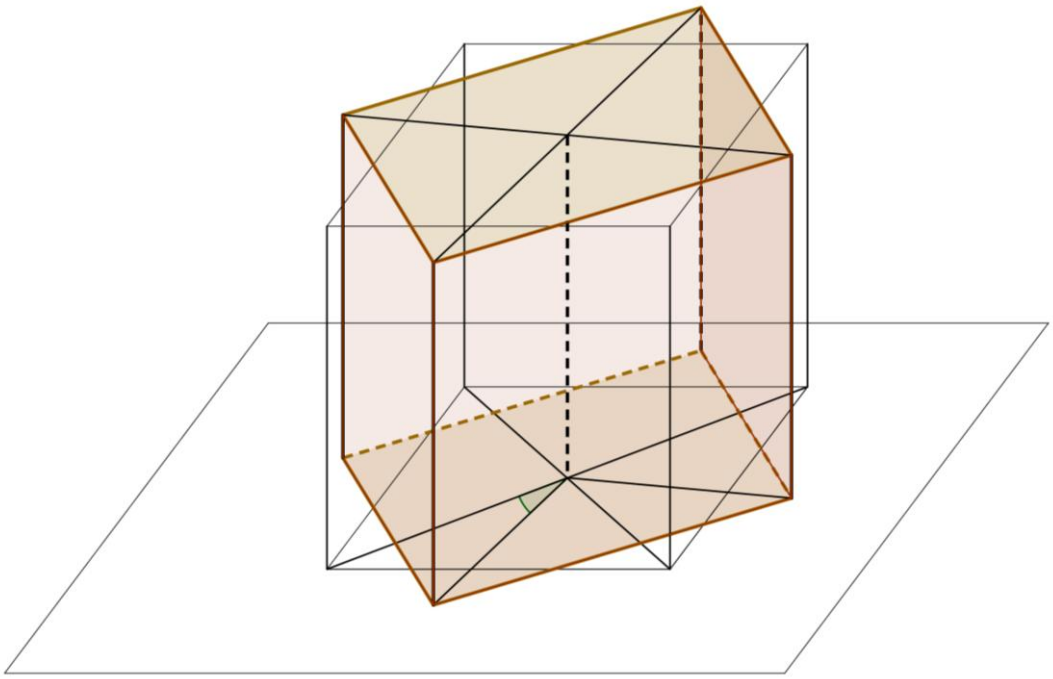
Figure 1

c) Représentation du cube après rotation.

(A'E') est une droite verticale et les arêtes [A'E'] et [AB] sont construites en vraie grandeur. On peut donc construire E', puis F', G' et H' comme images de B', C' et D' par la translation de vecteur $\overrightarrow{A'E'}$

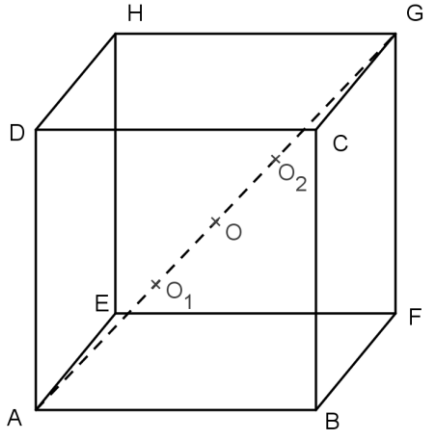


Le cube dans sa position initiale et son image par la rotation



3) Variante de la position γ

a) Une propriété du cube



Il s'agit de représenter ce cube (ci-contre en position α) en perspective de telle manière que sa diagonale [AG] soit verticale.
O est le milieu de [AG] : il est donc le centre du cube.
AE = AD = a et GE = GD = $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$, donc la droite (AG) appartient au plan médiateur de [DE] et par conséquent (DE) ⊥ (AG).
AE = AB = a et GE = GB $= \boldsymbol{a\sqrt{2}}$, donc la droite (AG) appartient au plan médiateur de [BE] et par conséquent (BE) ⊥ (AG).
La droite (AG) est orthogonale aux deux droites sécantes (BE) et (DE) : elle est donc orthogonale au plan (BDE).
Cette propriété d'une diagonale d'un cube nous permet d'affirmer que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH).
Par ailleurs, le centre de gravité O_1 du triangle équilatéral BDE est équidistant des trois points B, D et E : il est donc situé sur les plans médiateurs respectifs de [DE] et [BE] :
O_1 est donc situé sur (AG). Pour les mêmes raisons, le centre de gravité O_2 du triangle CFH appartient également à (AG).

D'autre part, le triangle AO_1E étant un triangle rectangle en O_1, on peut lui appliquer le théorème de Pythagore.

AE = a, $EO_1 = EB \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \boldsymbol{a\frac{\sqrt{6}}{3}}$ donc $AO_1^2 = \boldsymbol{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}$ **d'où** $AO_1^2 = \frac{a^2}{3}$

$$\text{et donc } AO_1 = a\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

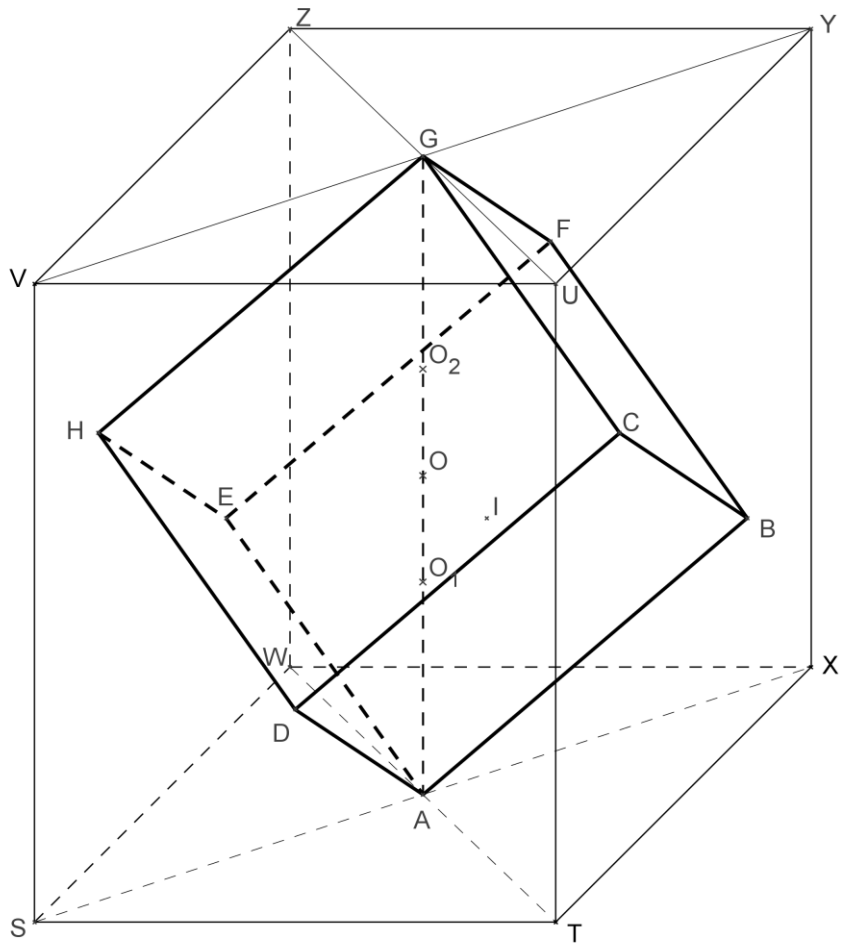
Un calcul analogue dans le triangle GO_2H rectangle en O_2 permet de montrer que $O_2G = a\,\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Ceci nous prouve que les trois segments $[AO_1]$, $[O_1O_2]$ et $[O_2G]$ ont la même longueur.

En conclusion, dans la position γ, la diagonale (AG) est verticale et les plans (DBE) et (CFH), qui lui sont orthogonaux, sont deux plans horizontaux.

b) Représentation en perspective cavalière su cube dans la position γ

Les considérations du paragraphe précédent permettent une représentation en perspective cavalière de ce cube, le choix étant fait de représenter les segments [AG] et [BE] dans un plan parallèle au plan frontal .

- On construit dans la position γ un parallélépipède rectangle STUVWXYZ dont les dimensions sont $\sqrt{2}$, $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$ et $a\sqrt{3}$.
- On place les points A et G respectivement au centre des faces STXW et VUYZ.
- On trace le segment [AG] vertical (de longueur $a\sqrt{3}$) et on le partage en trois parties égales.
- Du point O_1 situé au tiers du segment à partir de A, on construit une parallèle à (TX)
- Sur cette parallèle, on place le point I tel que $\overrightarrow{O_1I} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{TX}$
  et le point D tel que $\overrightarrow{O_1D} = -\frac{1}{2}\ \overrightarrow{TX}$.
- On construit alors le segment [BE] de milieu I, parallèle et de même longueur que [ST]
- On complète le triangle BDE de centre de gravité O_1.
- Les symétriques de B, D et E par rapport au milieu O du segment [AG] (appelés respectivement H, F et C) sont les trois derniers sommets de ce cube, dont il ne reste qu'à tracer les arêtes.



A appartient à la face STXW,
B et C à la face TXYU,
D à la face STUV,
E et H à la face SWZV,
F à la face WXYZ et
G à la face VUYZ.

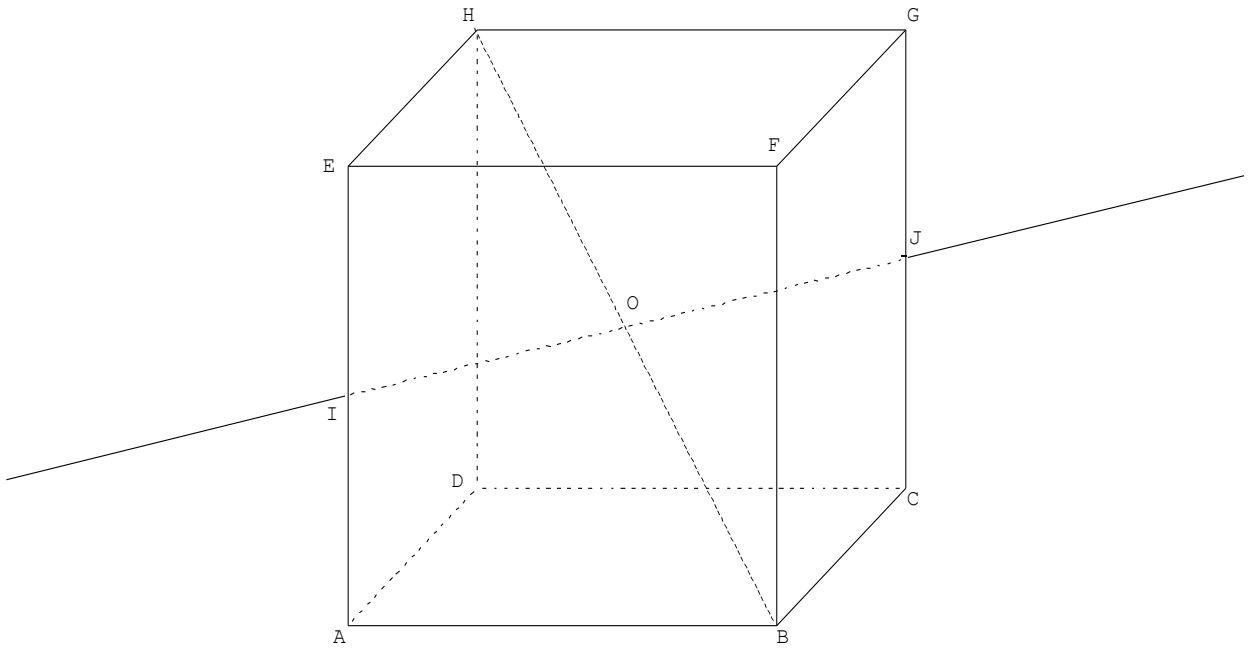
4) De la position α à la position γ

Le problème : En partant d'une représentation du cube de côté *a* et de centre O en position α, nous nous proposons construire la représentation du cube en position γ.

Pour cela, utilisons la rotation d'axe (IJ) (I milieu de [AE] et J milieu de [CG]) et transformant la diagonale [HB] en un segment [H′B′] vertical, ce segment contenant les centres des faces supérieure et inférieure. (Figure 1)

Remarque : (OH) étant dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, l'angle de rotation θ est égal à $\widehat{HOH'}$. Nous pouvons établir que sin θ = $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ce qui donne pour l'angle aigu θ une mesure d'environ 54,73°.

Figure 1



Etape 1 :
Le segment $[\mathrm{H'B'}]$ étant vertical, il est représenté en vraie grandeur. Il nous faut donc faire apparaître sur le dessin la longueur $a\sqrt{3}$ en vraie grandeur. Une construction classique : c'est la longueur MF (figure 2)

Sur la verticale passant par O et par les centres K et L respectivement des faces supérieures et inférieures, nous plaçons $\mathrm{H'}$ et $\mathrm{B'}$ tels que $\mathrm{OH'} = \mathrm{OB'} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (figure 3)

Figure 2

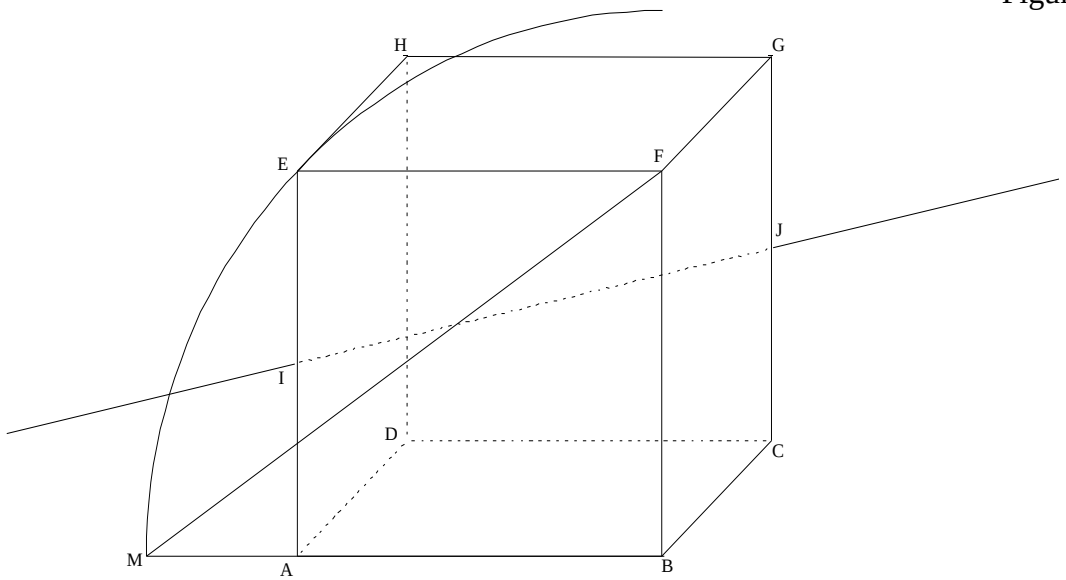
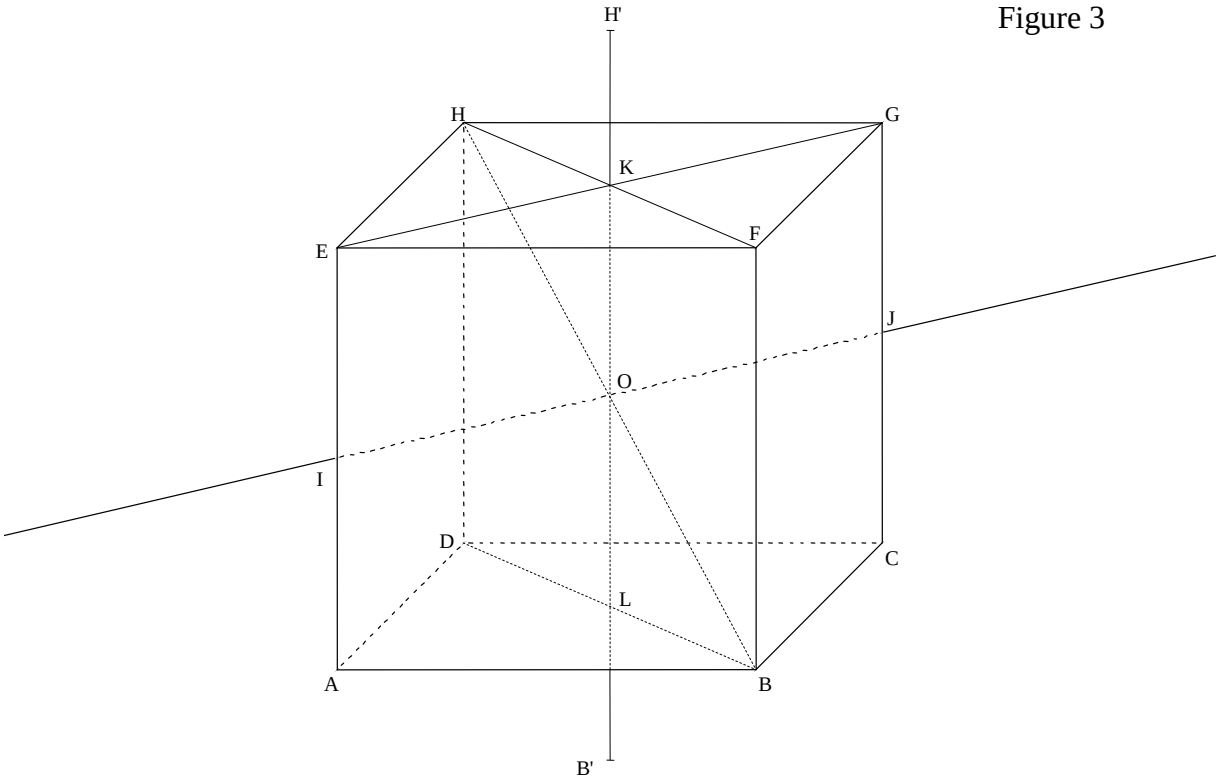


Figure 3



Etape 2 :
Pour construire G′, on peut remarquer que [OH′] et [JG] sont deux segments parallèles et perpendiculaires à [IJ], respectivement en O et J.
(IJ) étant l'axe de la rotation, nous avons l'égalité $\widehat{H'OF} = \widehat{GJG'} = \theta$.
Comme nous avons $OH' = OF = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $JG = JG' = \frac{a}{2}$, les triangles H'OF et GJG' sont isocèles, semblables et situés dans deux plans parallèles.

Ils sont alors représentés par deux triangles semblables (en rouge sur la figure 4)

La construction de E' se fait selon la même procédure. (Figure 5)

Figure 4

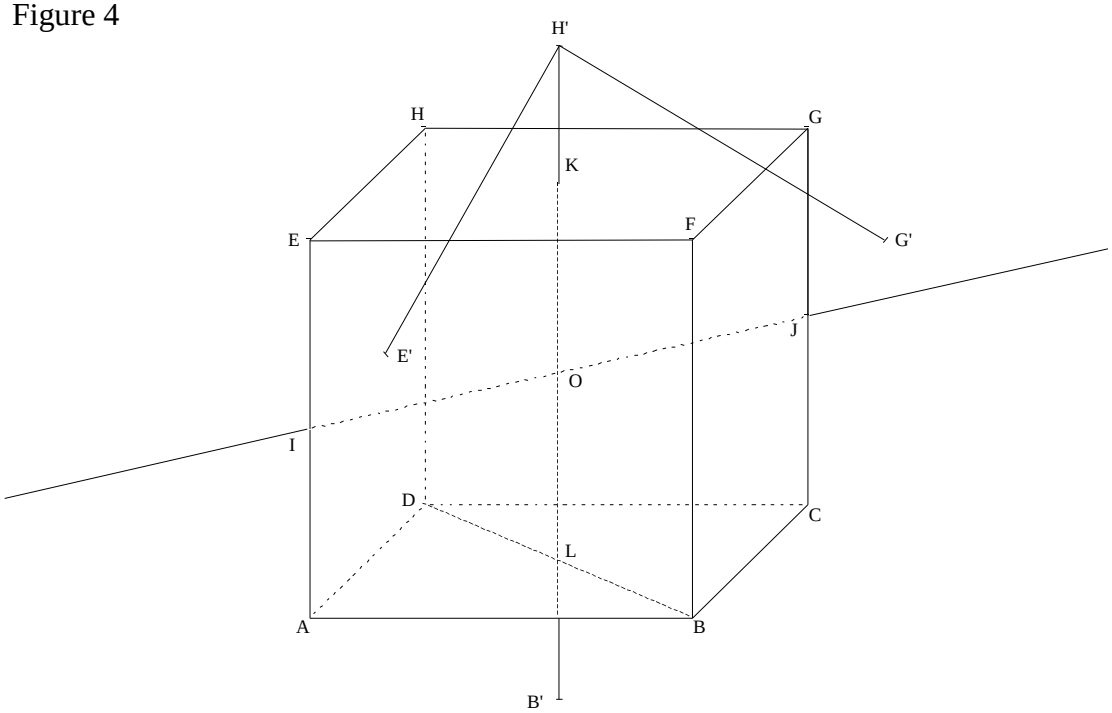
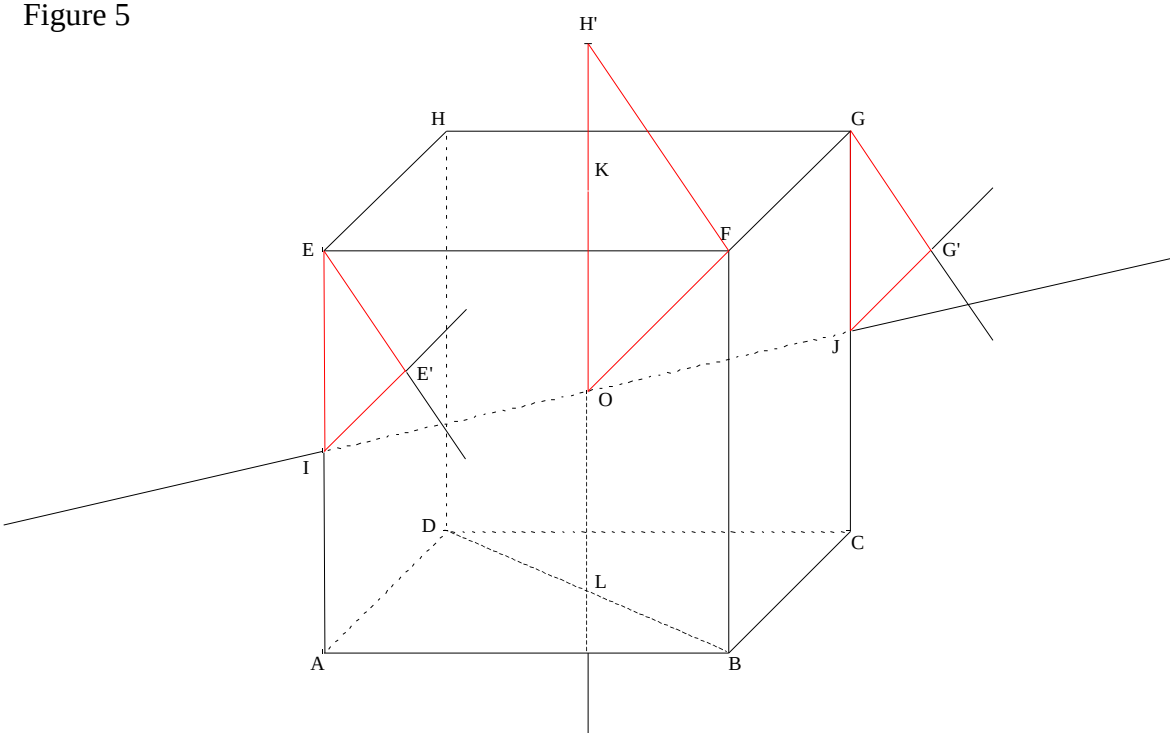


Figure 5



Etape 3 :
Par la rotation, le segment $[CG]$ de milieu J a pour image le segment $[C'G']$ de milieuJ. Nous construisons alors le point C' par symétrie de centre J. (Figure 6)
De la même façon, le point A' est le symétrique de E' par rapport à I. (Figure 7)

Figure 6

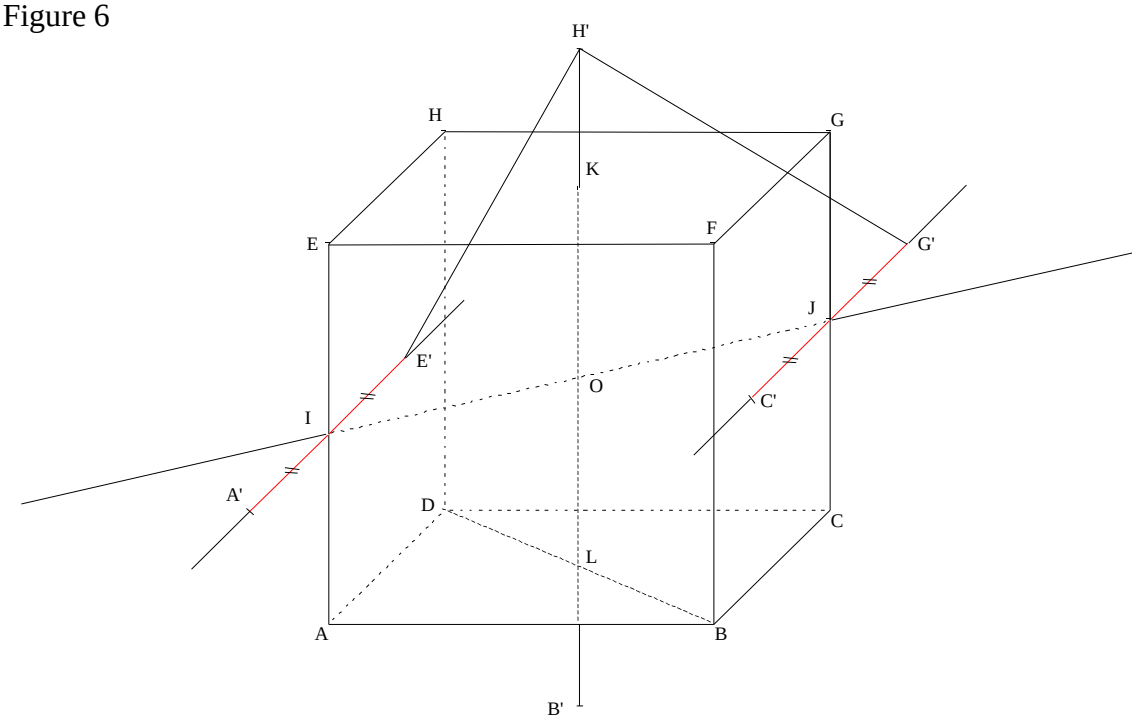
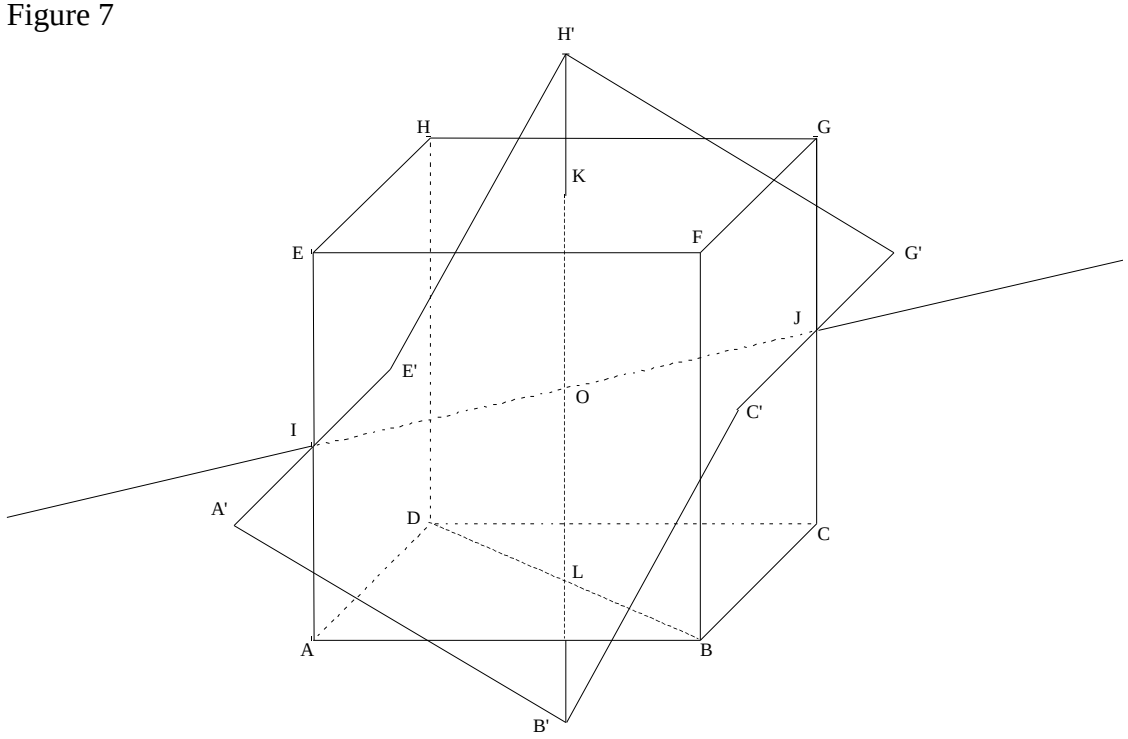
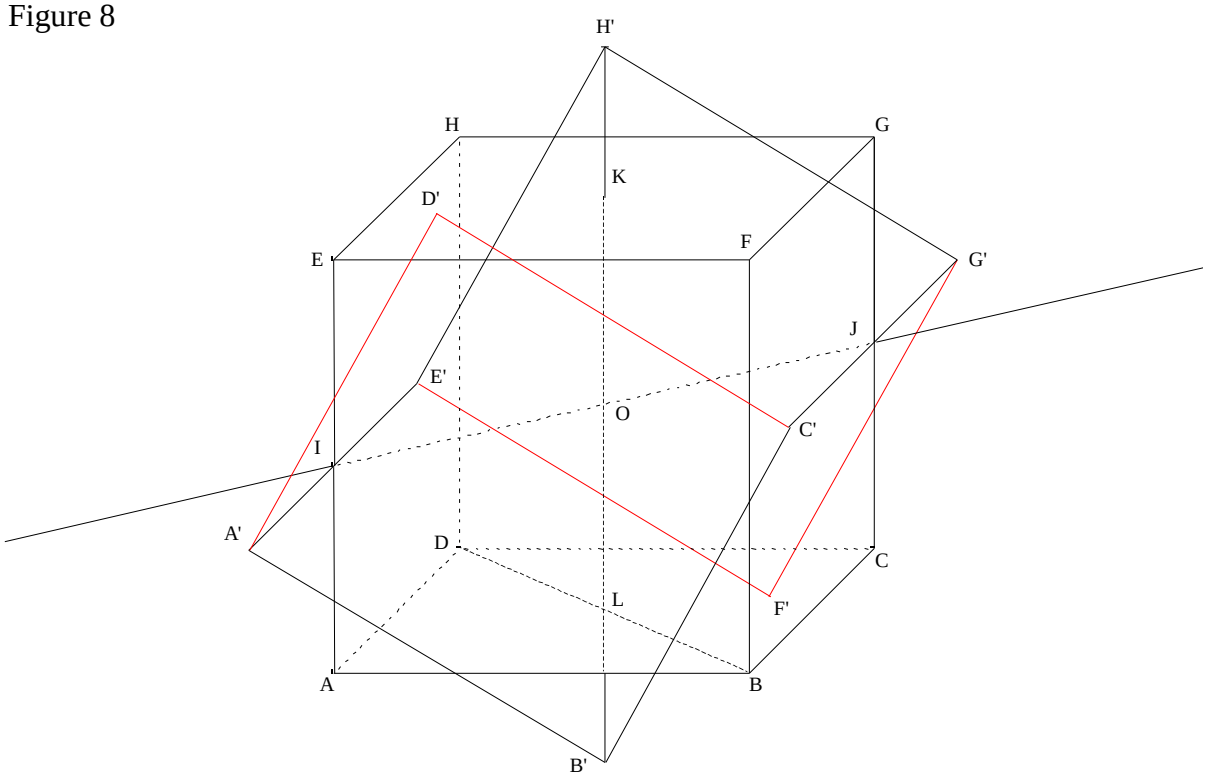


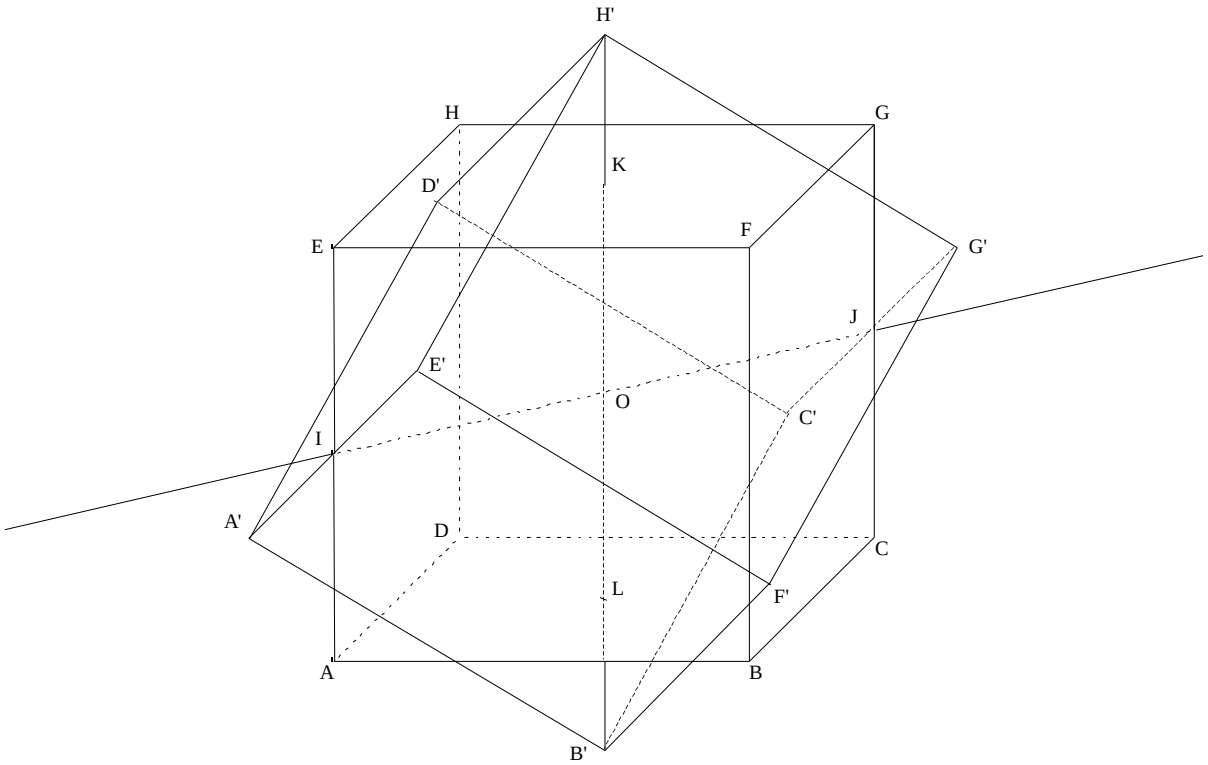
Figure 7



Etape 4 : Les images des carrés ABCD et EFGH sont des carrés, nous construisons alors les deux derniers sommets F’ et D’ tels que A’B’C’D’et E′F′G′H′ soient des parallélogrammes.(Figure 8)

Figure 8





Conclusion : Le cube en position α est après rotation en position γ

II. Activités commentées

1) Cube en position α : fonctions en géométrie de l'espace

Exercice donné en classe, dans le cadre d'un travail de groupe, en Seconde

Objectifs :

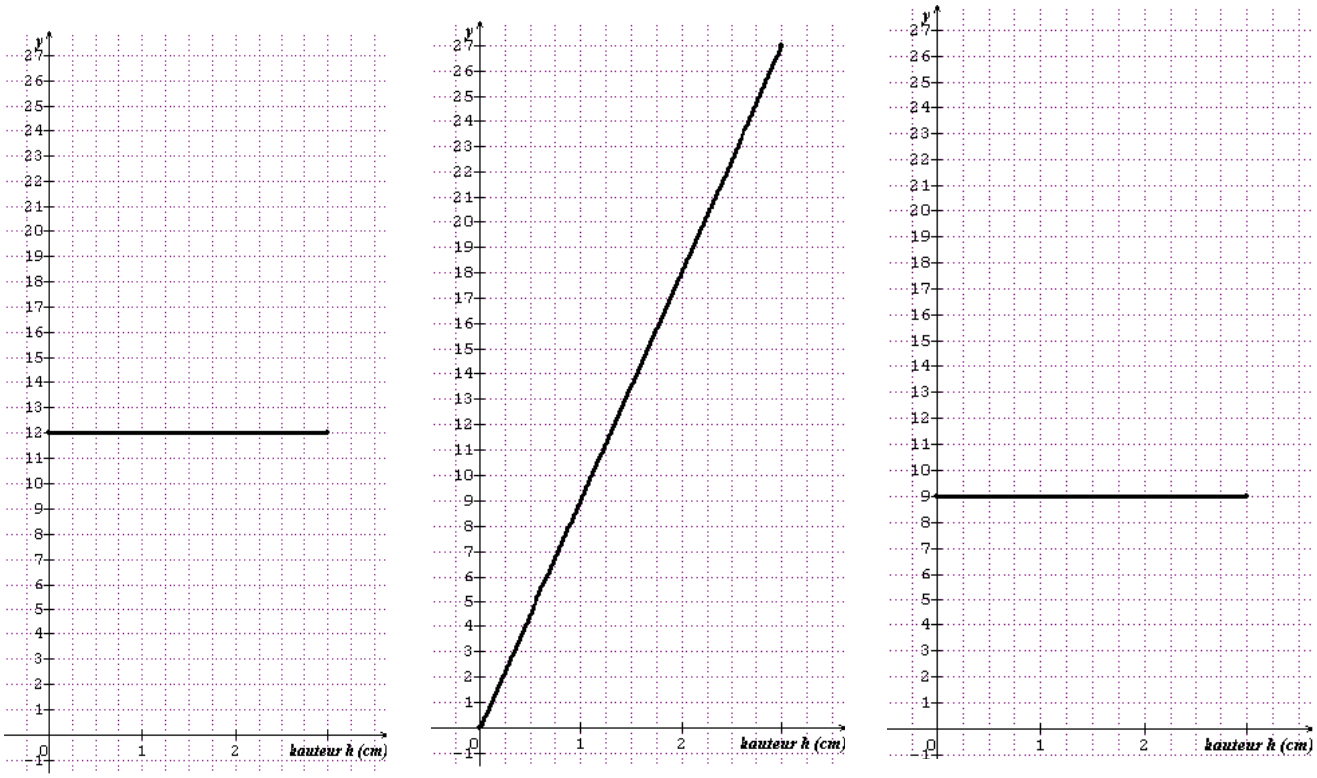
- Travailler sur des fonctions, en lien avec la géométrie dans l'espace.
- Travailler sur des fonctions à partir de leur représentation graphique, par exemple, savoir que la variable est représentée en abscisse et les images en ordonnée.
- Donner des exemples de fonctions constantes.
- Revoir des formules concernant périmètre, aire et volume

Enoncé :

Une boîte cubique contenant du liquide est posée sur un plan horizontal. On note *h* la hauteur de liquide contenu dans cette boîte. On s'intéresse aux grandeurs suivantes :

- le volume de liquide contenu dans la boîte ;
- l'aire de la surface du liquide en contact avec l'air ;
- le périmètre de cette surface.

Les trois courbes ci-dessous représentent ces trois grandeurs en fonction de *h*.
Malheureusement, une partie de la légende a disparu.
À vous d'associer courbes et grandeurs, en argumentant avec clarté et précision.



Commentaires :

Cet exercice a été donné en début d'année scolaire, comme premier exercice sur le thème des fonctions. Les élèves travaillaient par groupes de trois ou quatre, pour faciliter la remise en mémoire de leurs connaissances du collège.

Certains élèves ont eu des difficultés à passer de la situation réelle (un cube contenant du liquide, facilement dessiné) à la représentation des différentes fonctions, et ont dans un premier temps pensé que les segments de droite représentaient le niveau de l'eau.

La majorité des élèves a constaté que deux des fonctions représentées sont constantes, et déduit que le deuxième graphique représente la seule fonction non constante : le volume. La distinction entre les représentations de l'aire et du périmètre fut plus délicate : certains pensant que « l'aire est forcément plus grande que le périmètre »

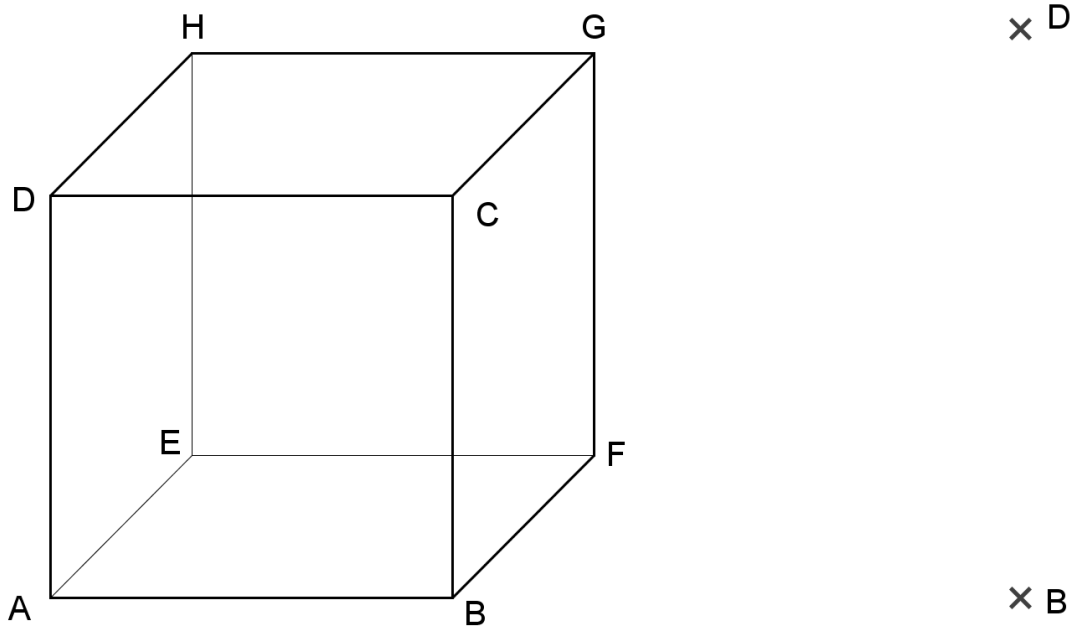
2) De la position α à la position β

Cet exercice a été donné en devoir surveillé en Seconde (les élèves ont pu y consacrer ½ heure)

Objectifs :

- Tester la capacité des élèves à utiliser la perspective cavalière ;
- Tester la capacité des élèves à reconnaître un triangle rectangle isocèle, un prisme ;
- Tester la capacité des élèves à prendre des initiatives pour initier la démarche du calcul de la hauteur.

Enoncé :
Un cube transparent, d'arête 4 cm, est posé sur une table horizontale. Il contient une hauteur *h* de liquide, avec *h* = 1 cm.
Ce cube est représenté en perspective cavalière ci-dessous. Représenter le liquide (en couleur).
On fait maintenant pivoter ce cube autour de l'arête [BF], jusqu'à ce que la diagonale [BD] de la face avant devienne verticale.
Représenter ci-dessous, avec la même perspective cavalière que la première figure, le cube dans cette nouvelle position. Les points B et D sont déjà placés.
Dans cette question, les traces de recherche, mêmes incomplètes seront prises en compte dans l'évaluation.
Calculer la hauteur *h*' de liquide contenu dans le cube dans cette nouvelle position.



Commentaires :

Les figures (cube et liquide) ont été réalisées correctement. Quelques élèves seulement ont reconnu et utilisé le fait que le liquide avait la forme d'un prisme dans la deuxième position. Peu d'élèves sont arrivés au résultat final, mais beaucoup ont pris des initiatives initiant la démarche du calcul de la hauteur.

3) **cube en position beta**

Exercices donnés en devoir maison en Seconde

Exercice 1 : Cuve à mazout

Objectifs :

- réaliser une figure en perspective avec des règles imposées ;
- intérêt de mettre en place une formule de calcul ;
- découverte d'une fonction non affine ;
- retrouver un solide vu en collège : le prisme.

Enoncé :
Line Éhair a fait remplir sa cuve de fuel le 1 octobre 2006. Sa cuve est un cube posé sur une de ses arêtes, de telle sorte que la face avant et la face arrière ont une diagonale horizontale et une diagonale verticale. Ces diagonales mesurent 1,40 m.

1. Représenter la cuve en perspective cavalière à l'échelle 1/20, de telle sorte que : le plan contenant la face avant est un plan frontal, le coefficient de réduction est égal à 0,7 et l'angle de fuite est égal à 30°.
2. Quelle est, en litres, la contenance de la cuve ?
3. Au premier janvier, Line se demande combien il lui reste de fuel. Une partie transparente le long de la diagonale verticale de la face avant lui permet de voir la hauteur de fuel restant ; elle mesure cette hauteur et trouve 35 cm.
   Elle se dit alors : « Comme j'ai consommé les 3/4 en 3 mois, le dernier quart me permettra de tenir encore un mois». Pourtant, malgré une météo clémente, Line tombe en panne de fuel moins de deux semaines plus tard.
   Expliquer quelle est l'erreur de raisonnement de Line Éhair.
4. Line décide alors de graduer la « diagonale verticale » tous les décimètres, et d'indiquer avec un marqueur la quantité de fuel restant (en litres).
   Recopier et compléter le tableau ci-dessous, après avoir détaillé tous les calculs effectués.

Hauteur de fuel restant (dm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Volume de fuel restant (L)														

Dans un repère, tracer la courbe représentant le volume de fuel restant, en fonction de sa hauteur.

Commentaires :
Cet exercice a été donné au moment des premiers contacts avec la notion de fonction. C'est une des premières fonctions non affines rencontrées par les élèves.
La reconnaissance du prisme n'a pas été évidente pour tous. Le calcul des différents volumes peut se faire au « cas par cas » ou bien en cherchant une « formule ».
Il était initialement prévu que, lors de la correction, serait tracée la graduation de la « diagonale verticale » de la cuve à mazout à partir de la représentation graphique de la question 4. Mais trop peu d'élèves ayant obtenu cette courbe, cet objectif n'a pu être réalisé. C'est pourquoi l'exercice suivant a été proposé lors d'un devoir à la maison ultérieur.

Exercice 2 : Courbe représentative d'une fonction

Objectifs :

- Savoir calculer une image par une fonction définie par son expression algébrique.
- Savoir exploiter une représentation graphique

Enoncé :

Soit f la fonction définie sur [0 ; 14] par :

- Si $x \in [0 ; 7]$, alors $f(x) = x^2 \times 7\sqrt{2}$
- Si $x \in]7 ; 14]$, alors $f(x) = -f(14 - x)$.

1. Calculer $f(3)$ (donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à une unité près).
2. Calculer $f(11)$ (donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à une unité près).
3. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (donner les valeurs arrondies à une unité près).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
$f(x)$															

4. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (donner les valeurs arrondies à une unité près).

x	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14
$f(x)$														

5. Dans un repère, tracer la courbe représentative de f (à faire sur papier millimétré de préférence).
   En utilisant la courbe précédente, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

$f(x)$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
x										

Commentaires :

Cette fois, les élèves avaient su tracer la courbe et compléter le tableau de valeurs de la dernière question. La graduation de la « diagonale verticale » de la cuve à mazout a pu se faire lors de la correction. Cela a permis de mettre à nouveau en évidence que la hauteur de fuel restant n'est pas proportionnelle au volume.

Le cube dans tous ses états

Exercice donné en devoir maison en Terminale S. Cet exercice n'a été proposé qu'à la partie de la classe ayant une moyenne supérieure à 10 au premier trimestre.

Objectifs :

- Etudier une fonction (non affine) définie par intervalles, où les coefficients et les valeurs essentielles de la variable ne sont pas des entiers compris entre -5 et 5 (comme c'est trop souvent le cas)
- Donner du sens aux notions locales de continuité, dérivabilité.
- Redécouvrir le lien entre vitesse et dérivée.
- Redécouvrir les solides usuels à travers des représentations non usuelles (cube, prisme).

Enoncé :

A) <u>Etude d'une fonction définie par intervalles</u>

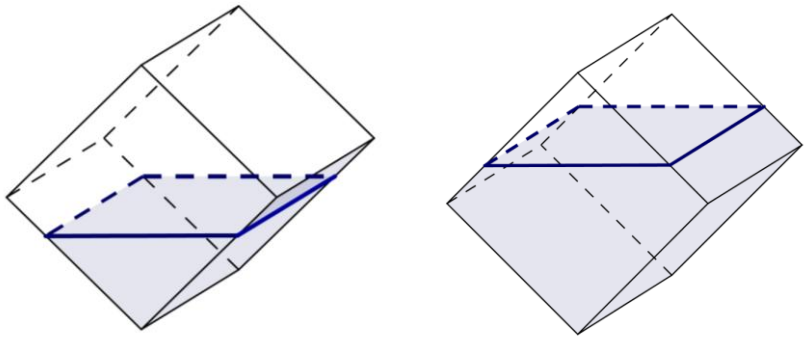
Soit f la fonction numérique de la variable t définie sur [0 ;1000] par :
$f(t) = \sqrt{0{,}001t}$ lorsque $t \in [0\ ;500]$ et $f(t) = \sqrt{2} - \sqrt{1 - 0{,}001t}$ lorsque $t \in\ ]500\ ;1000]$
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité 0,02 cm en abscisse et 20 cm en ordonnée.

1. Démontrer que f est continue en 500, puis que f est continue sur [0 ;1000].
2. Etudier la dérivabilité de f (à droite) en 0 ? En déduire une conséquence graphique.
3. Montrer que f est dérivable en 500 ?
   Donner l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 500.
4. Calculer pour $t \in [0\ ;500]$ la somme $f(500 - t) + f(500 + t)$. Que peut-on en déduire pour (C) ?
5. f est-elle dérivable en 1000 ? (on pourra utiliser les questions 2 et 4).
6. Justifier que f est dérivable sur l'intervalle]0 ;1000[. Calculer $f'(t)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer (C)

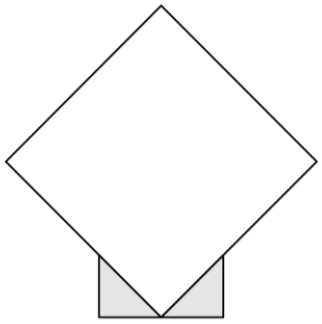
B) <u>Un problème de remplissage</u>

On considère une citerne à fuel, de forme cubique d'arête 1 mètre, en contact avec le sol sur une arête et qui repose sur deux prismes de ciment de mêmes dimensions dont la base est un triangle rectangle isocèle. On souhaite bâtir une jauge sur la diagonale verticale de la face avant notée D.

La citerne partiellement remplie



Vue de la face avant



Le cube dans tous ses états

On remplit cette citerne avec un débit de 1 litre par seconde. On note à un instant t donné (en secondes), v le volume de fuel (en m^3) et h la hauteur de fuel dans la citerne à partir du sol (en m).

1. Calculer v en fonction du temps t. Quel est le temps de remplissage de la citerne ?
2. Calculer v en fonction de h. (on distinguera deux cas)
3. Démontrer enfin que $h = f(t)$ (on distinguera deux cas et on donnera les valeurs de t correspondant à chacune des expressions trouvées)
4. En utilisant la courbe (C), construire une graduation de D indiquant les volumes correspondants à un nombre entier d'hectolitres.
5. On s'intéresse à la vitesse de progression du niveau de fuel sur D. Quel est le lien entre cette vitesse et la fonction f ?
   Donner cette vitesse pour $t = 1$, $t = 500$, $t = 999$ en précisant l'unité.

Etudier le sens de variation de cette vitesse sur l'intervalle [0 ;500], puis sur l'intervalle [500 ;1000].
Justifier les conclusions obtenues en argumentant sur la forme de la citerne et les conditions de remplissage.

Commentaires : Quelques constats sur le travail des élèves.

La partie A :
Les notions locales de continuité et dérivabilité sont mal assimilées. Seuls 3 élèves établissent la continuité, puis la dérivabilité en 500. (questions 1 et 3)
Les autres élèves, s'ils répondent, se contentent d'une continuité à gauche et d'une dérivabilité à gauche en utilisant l'expression $\sqrt{0{,}001t}$ … puisque pour $t = 500$, f(t) est donnée par cette expression.
Le reste (calcul de dérivée, étude des variations, représentation graphique) est mieux.
La non dérivabilité de f en 0 ne pose pas de problème.

La partie B :
Question 1 : pas de problème avec les unités de volume, par contre quelques erreurs dans la conversion minutes-secondes : « environ 16,7 min soit 16 min 7 s »
Question 2, 3 : quatre élèves ont vu une pyramide au lieu d'un prisme. Tous ont, pour la deuxième moitié de la citerne, raisonné par différence (volume total – partie non remplie)
Question 4 : 4 élèves n'ont pas répondu : il leur a échappé que l'abscisse t de la représentation graphique et le nombre de litres de fuel dans la citerne sont les mêmes, donc que les hectolitres correspondaient aux centaines de secondes.
Les autres élèves ont bien répondu. Certains ont redessiné la cuve et reporté la jauge sur la diagonale.
Question 5
Le lien entre vitesse et fonction initiale a été donnée. Par contre, dans leur copie, ils remplacent « vitesse de progression du niveau du fuel sur D » par « vitesse de remplissage » ….qui est constante.
Question 6 : Des erreurs de calcul trop nombreuses dans le calcul de la dérivée seconde. Toutefois, les élèves ont bien saisi le problème puisque leur conclusion décrit bien une vitesse décroissante pour la première moitié de la citerne, et une vitesse croissante pour la seconde moitié.
La justification contient toujours l'argument de la « surface qui augmente, puis qui diminue », même si la l'expression laisse beaucoup à désirer.

Complément : durant la correction, on a revu la construction de la jauge et observé localement la non dérivabilité de f ' en 500 (construction des demi-tangentes au point d'abscisse 500 avec geogebra)

4) **De la position α à la position γ**

Exercice donné en devoir maison en Terminale S (29 élèves)

Objectifs :

- Mieux connaître un solide usuel : le cube
- Préparer la construction de la représentation du cube en position γ (voir page 38 et 60)

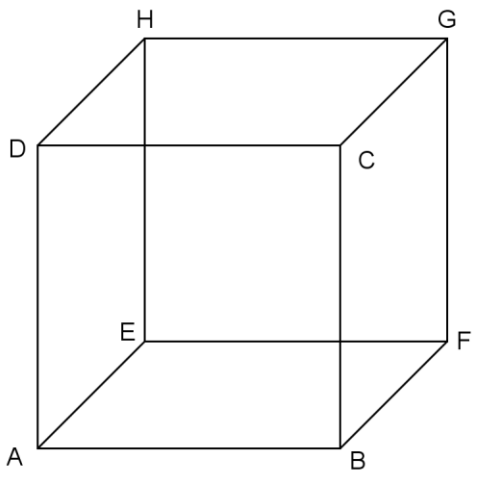
Enoncé :

Cet exercice comporte trois parties : les deux premières sont indépendantes, mais les résultats obtenus seront utiles à la résolution des questions de la troisième partie

PARTIE A

On considère un cube ABCDEFGH d'arête *a*, les sommets étant disposés comme sur la figure ci-contre.

1) Déterminer en fonction de *a* les valeurs exactes des longueurs BD et DF.
2) Quelle est la nature des triangles BDE et CFH ? (*On justifiera brièvement)*
3) Déterminer deux sommets du cube situés à égale distance des trois sommets B, D et E.
4) Montrer que ces deux sommets sont aussi équidistants de trois autres sommets de ce cube.



PARTIE B

On admet le théorème suivant.
« Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points équidistants de A et de B est un plan appelé *plan médiateur* de [AB]. Ce plan est orthogonal en son milieu au segment [AB] .»

On considère désormais trois points non alignés H, I et J de l'espace et on appelle *P* le plan qui les contient.

1) Quel est l'unique point Ω du plan *P* situé à égale distance des trois points H,I et J ?
2) On considère un point M situé sur la droite Δ orthogonale en Ω au plan *P*.
   Justifier que MH=MI=MJ .
3) Réciproquement, on considère un point N de l'espace équidistant de H, I et J.
   Montrer que N appartient à deux plans sécants et perpendiculaires à *P*.
   En déduire que N est obligatoirement situé sur une droite. De quelle droite s'agit-il ?
4) A l'aide des questions précédentes, énoncer un théorème permettant de caractériser le lieu des points équidistants de trois points non alignés de l'espace.

PARTIE C

On considère à nouveau le cube ABCDEFGH de la partie A.

1) Quel est l'ensemble des points équidistants des points B, D et E ?
2) Quel est l'ensemble des points équidistants des points C, F et H ?
3) En déduire que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.
4) On appelle respectivement O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles BDE et CFH et on appelle O le centre du cube. Démontrer que A,G, O, O_1 et O_2 sont alignés.
5) Calculer la longueur AO_1 en fonction de *a*.
   En déduire l'égalité $AO_1 = O_1O_2 = O_2G$

Commentaires : Quelques constats sur le travail des élèves

Partie A : aucune difficulté

Partie B
Question 1 : l'isobarycentre est cité 4 fois (au lieu du centre du cercle circonscrit au triangle)
Question 2 : beaucoup de paraphrase de l'énoncé (le terme justifier n'a pas toujours été pris au sens de démonter)
Question 3 : bien, même si le fait que les plans soient sécants a souvent été admis.
Question 4 : beaucoup de difficulté à rédiger un énoncé clair.

Partie C :
Les calculs rebutent trop souvent les élèves (un bon tiers renonce ou ne produit rien)
L'idée de symétrie centrale n'est que rarement bien formulée