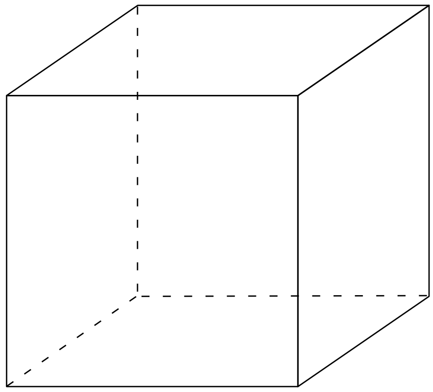
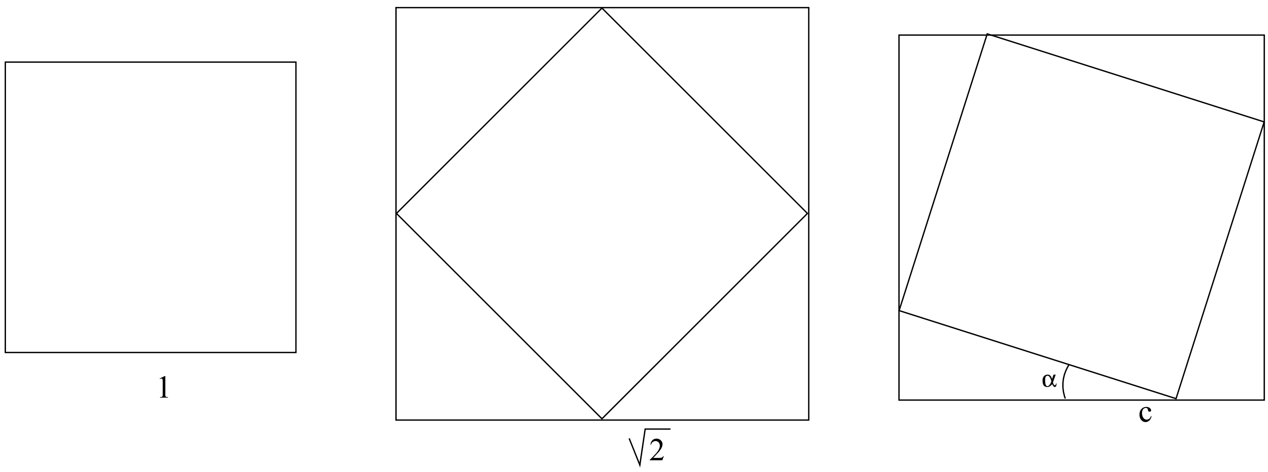
I - Perspectives cavalières d'un cube



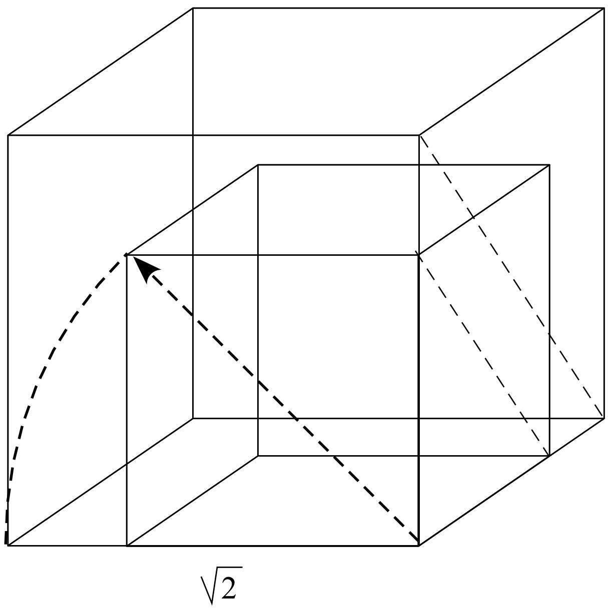
<u>Problème 1</u> : voici un cube en perspective cavalière. Comment représenter, dans la même perspective, le même cube dans différentes positions ?

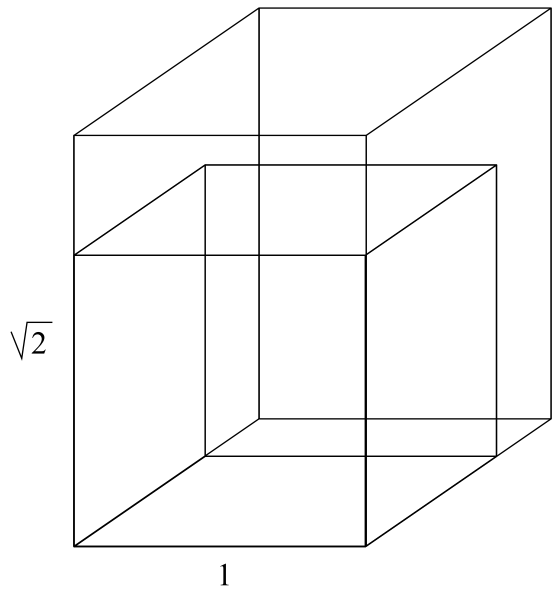
Voici une de ses faces, en vraie grandeur, et cette même face tournée de 45° ou de α, inscrite dans un carré aux côtés parallèles à ceux de la face avant :



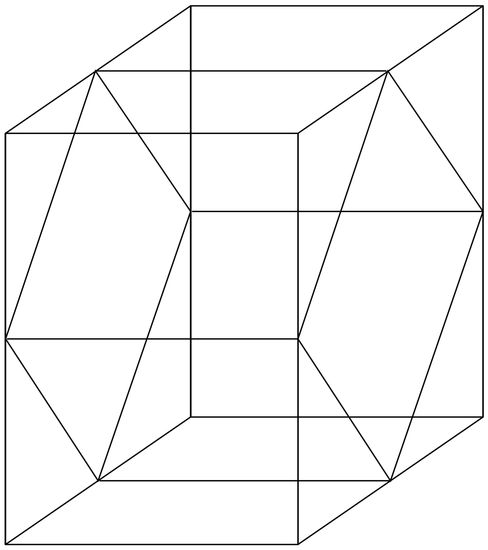
1 - Mettre un plan diagonal parallèle au plan du dessin

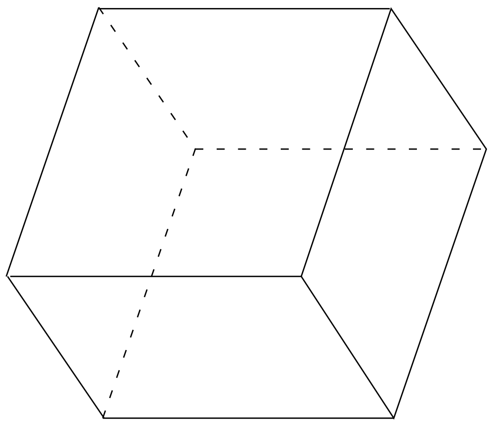
Le cube d'arête $\sqrt{2}$ et le pavé d'arêtes $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$





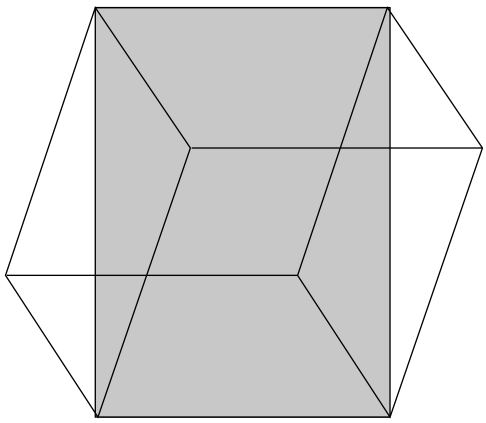
Le cube tourné à 45° selon l'axe (dg)



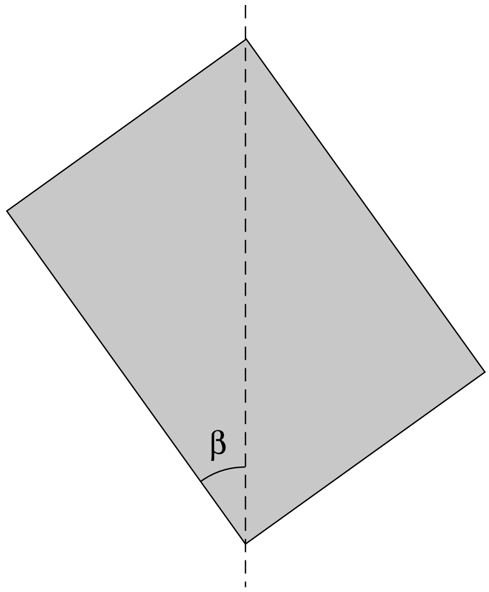


2 - Mettre une diagonale à la verticale

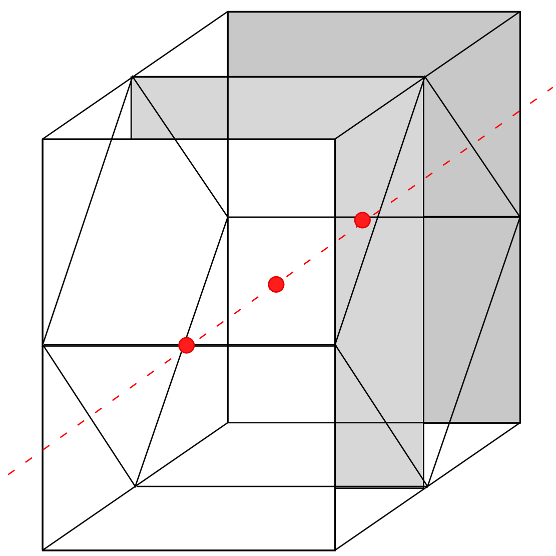
Le même cube que ci-dessus et son plan diagonal parallèle au plan du dessin.

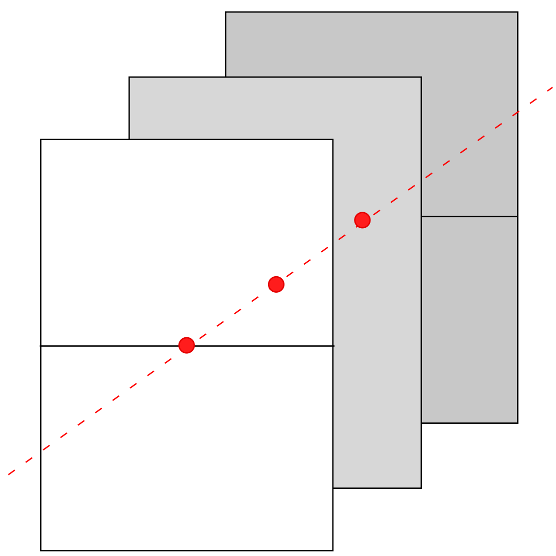


Le plan diagonal tourne de b pour que sa diagonale devienne verticale.

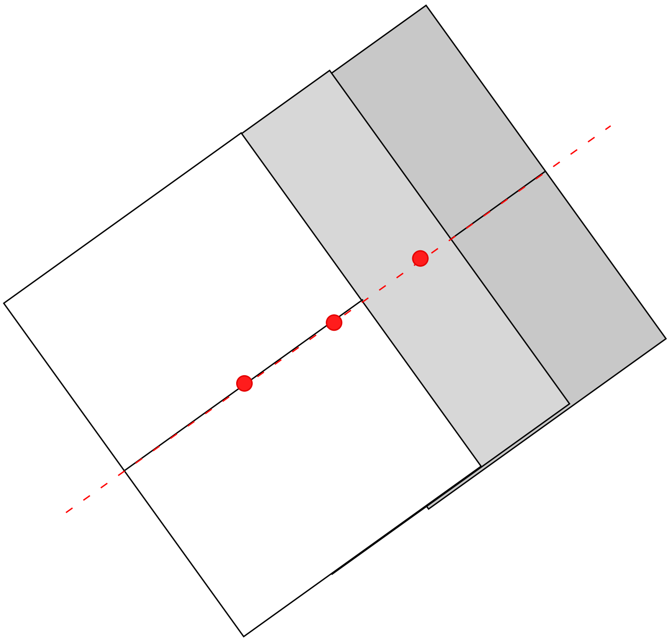


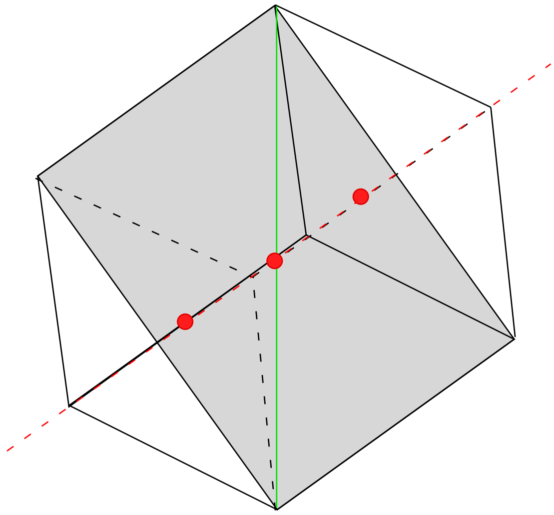
Trois plans parallèles au plan du dessin dans le pavé



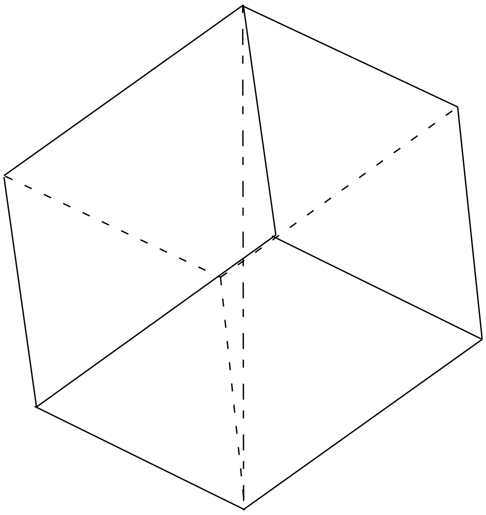


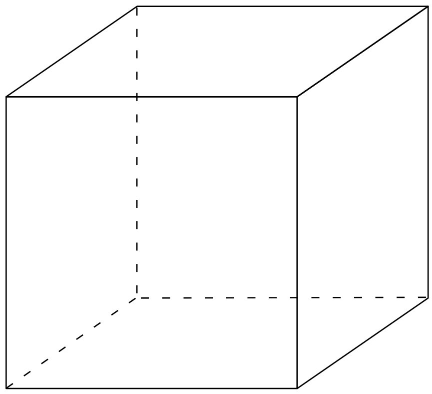
Les 3 rectangles parallèles au plan du dessin tournent chacun autour de leur centre de l'angle β dans leur plan





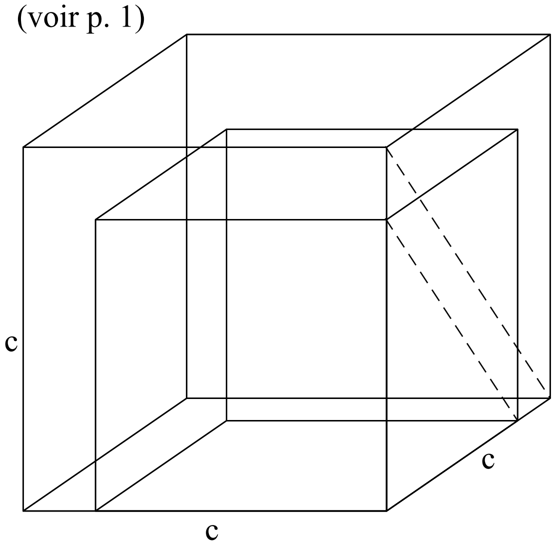
Et voici le cube avec sa diagonale verticale, dans la perspective du cube au repos :



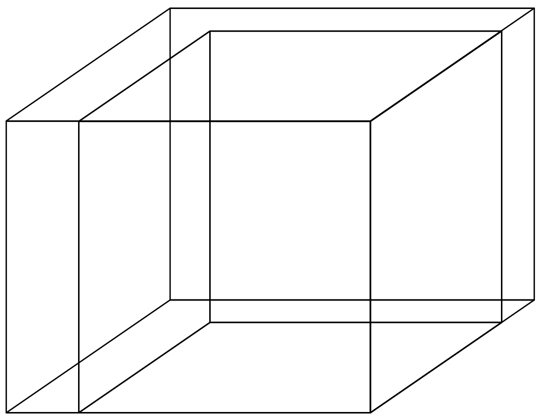


3 - Faire tourner le cube d'un angle α autour d'un des trois axes des faces : (dg), (hb), (vr), par exemple (hb)

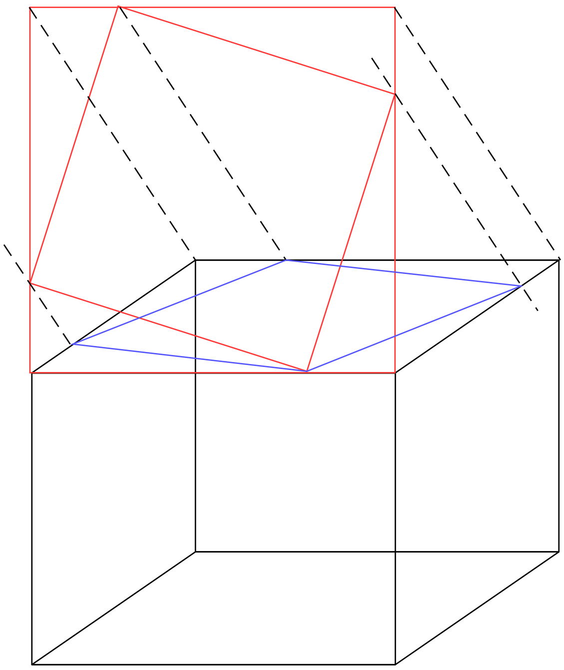
D'abord construire un cube d'arête c au repos (voir p. 1)



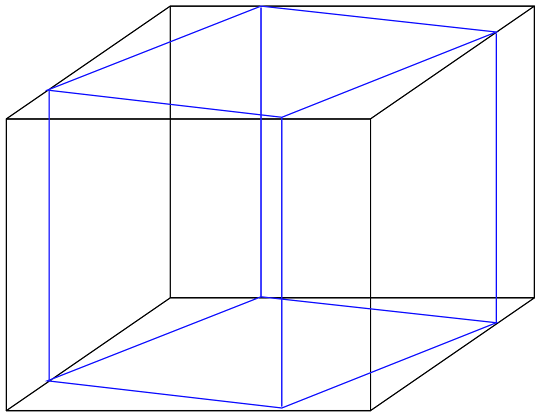
Et le tronquer à la hauteur 1



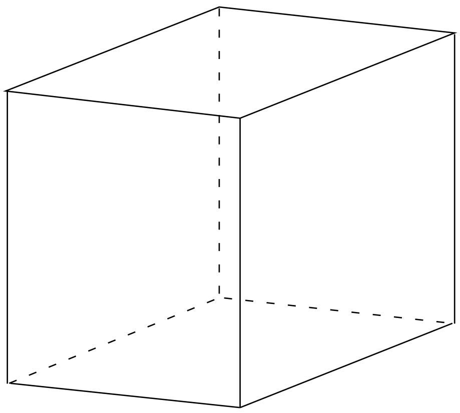
Rabattre la face réelle de la face dans le carré circonscrit, par Thalès, et tracer la perspective de cette face.

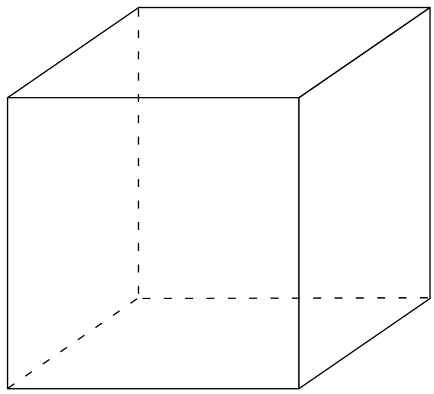


Reproduire la face supérieure, par translation, dans la face inférieure et relier par les arêtes verticales.



Et voici le cube qui a tourné de l'angle α autour de son axe vertical, dans la perspective du cube au repos :

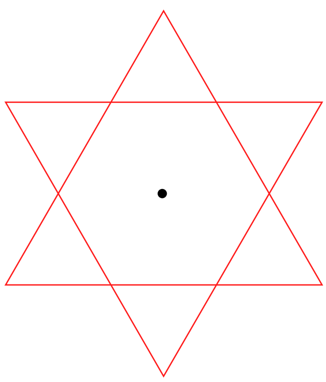




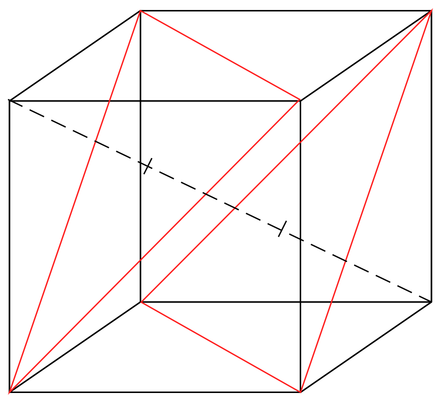
4 - Mettre une diagonale dans la direction des fuyantes du cube au repos

Analyse :

Les deux triangles équilatéraux de côté $\sqrt{2}$ en projection orthogonale sur le plan du dessin et leur centre commun, image de la diagonale



La diagonale, de longueur $\sqrt{3}$ est coupée en trois parties égales par les plans des deux triangles, aux points I et J.

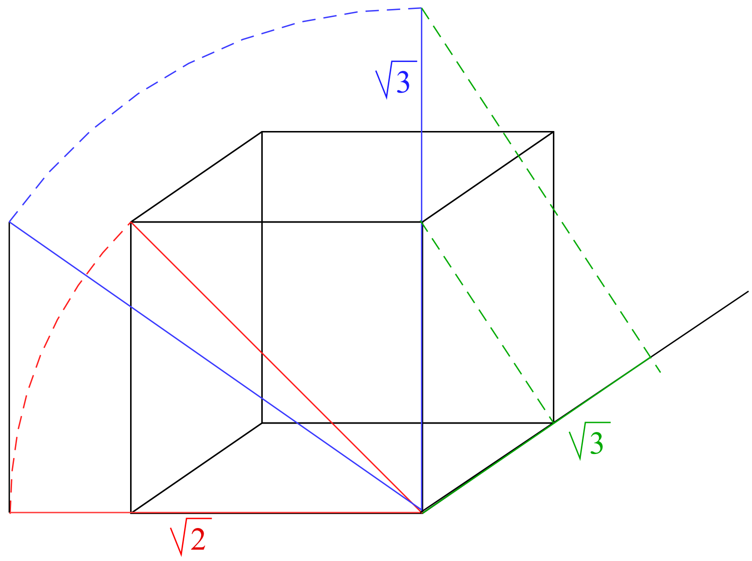


Les sommets du cube sont deux à deux symétriques par rapport au centre O du cube. Six des 8 sommets sont les sommets des triangles. Les deux derniers sont les extrémités de la diagonale. Six des 12 arêtes joignent les extrémités de la diagonale aux sommets des triangles. Les six autres relient deux par deux les sommets des triangles, non symétriques par rapport à O, entre eux.

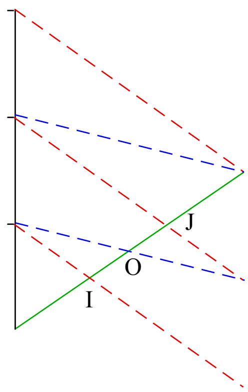
Il suffit donc de dessiner les deux triangles équilatéraux (en vraie grandeur) et la diagonale pour réaliser la perspective du cube.

Construction :

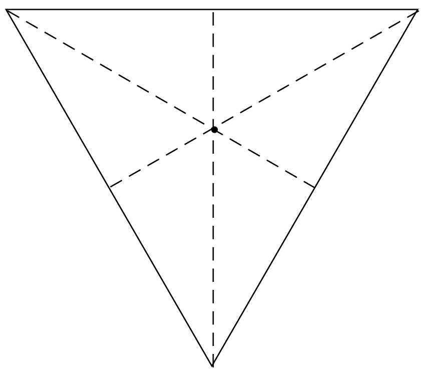
Longueur et direction de la diagonale

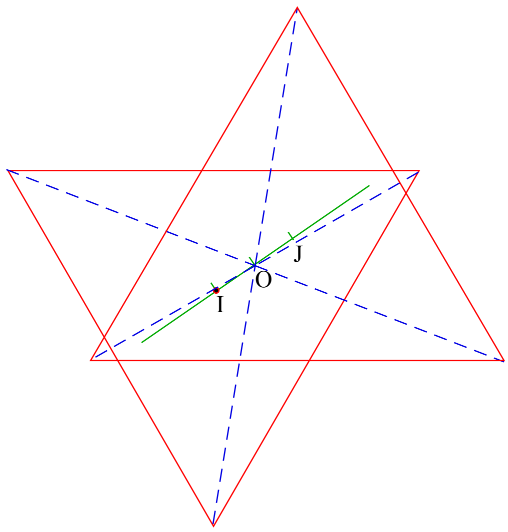


Marquage des points I, J, O

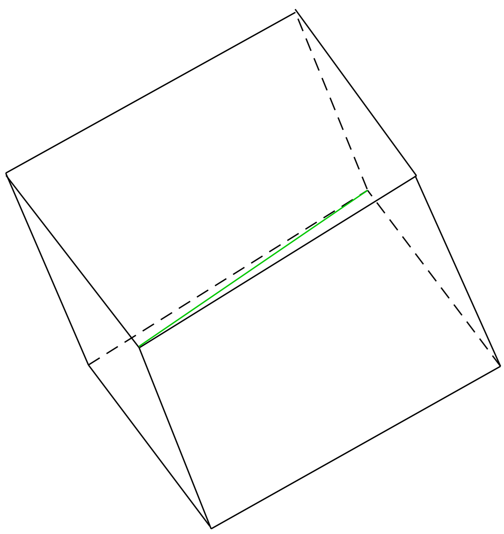


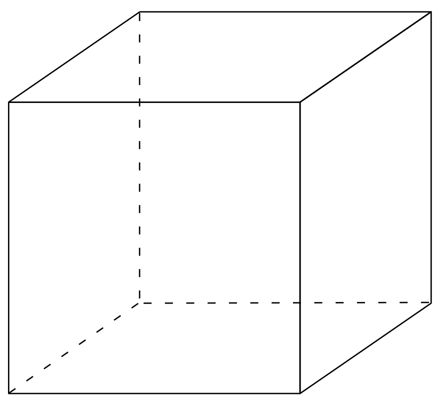
Construction des deux triangles et placement de la diagonale





Et voici le cube avec sa diagonale de bout, dans la perspective du cube au repos :



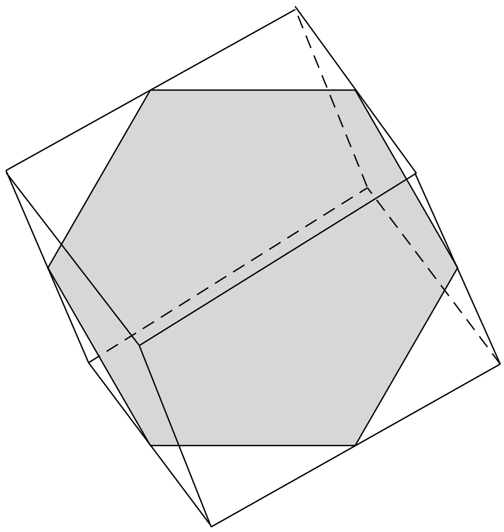


5 - Remarques

- Le seul théorème utile est le théorème de Thalès. Il nous permet de construire un cube homothétique au cube de référence ; en particulier pour la dimension en fuyantes. Le théorème de Pythagore peut sembler indispensable au vu des dimensions . Mais, en fait, il s'agit de la longueur de la diagonale d'une face visible en vraie grandeur et de la diagonale d'un rectangle diagonal comme ceux de la page 2, qu'on peut reporter directement.

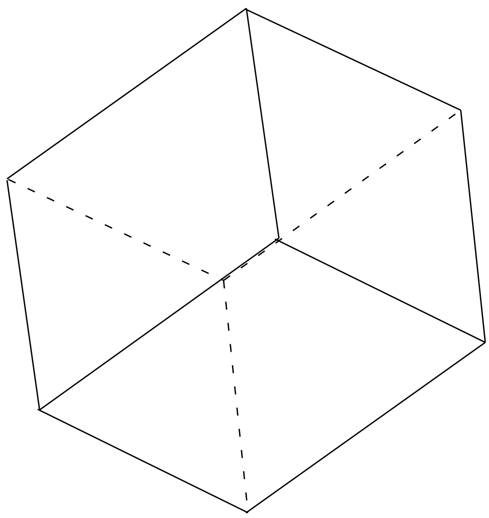
- Le théorème de Thalès dans l'espace permet de savoir que les plans des deux triangles équilatéraux coupent la diagonale en trois parties égales dans l'exercice 4, car les arêtes du cube de base portent 4 représentants différents de chacun des vecteurs de base et que la projection orthogonale (suivant les plans des triangles) sur la diagonale les projettent sur les trois parties de la diagonale.

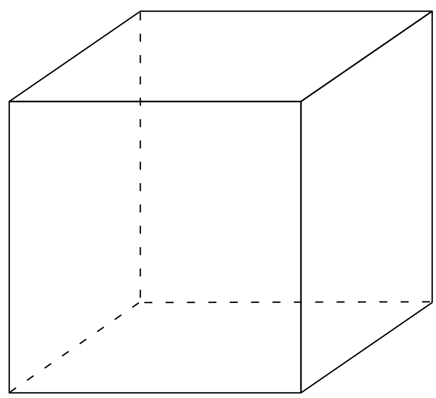
Voici, dans le cube avec sa diagonale de bout de l'exercice 4, celui des 4 hexagones réguliers joignant les milieux de 6 arêtes qu'on voit en vraie grandeur.



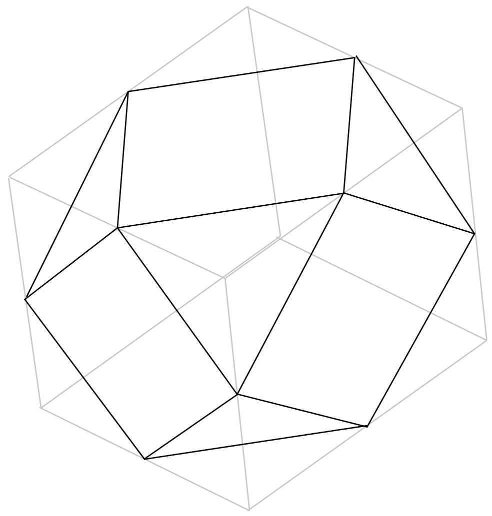
6 - Solides de Platon et d'Archimède inscrits dans le cube

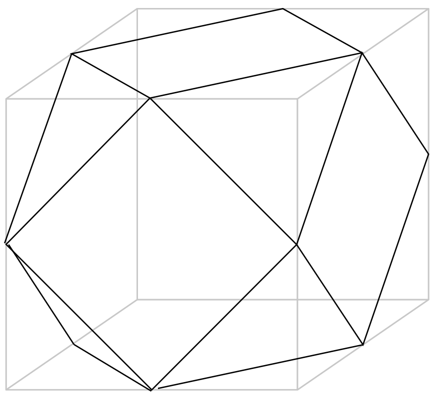
- On peut représenter en perspective cavalière tous les solides qui s'inscrivent dans le cube. Le parallélisme étant conservé, les rapports le seront.
- Parmi ces solides, on trouve l'octaèdre régulier dont les sommets sont les centres des faces du cube, le stella octangula dont les 8 sommets sont ceux du cube, le cuboctaèdre et l'octaèdre tronqué, obtenus respectivement en tronquant aux milieux et aux trois-quarts des arêtes et le tétraèdre régulier dont les quatre sommets sont 4 des 8 sommets du cube et les arêtes des diagonales de faces du cube.
- Il suffit de représenter le cube dans une position quelconque et de placer les sommets du solide inscrit.



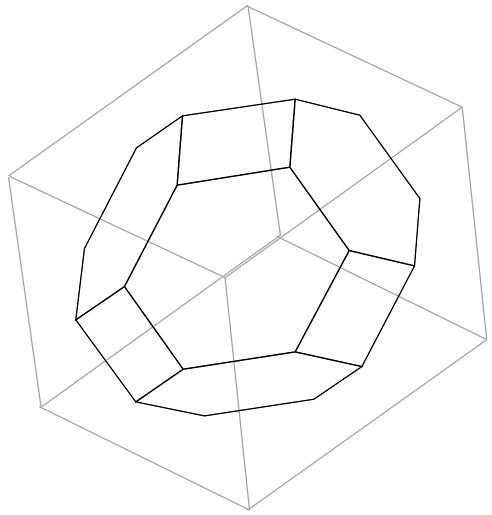


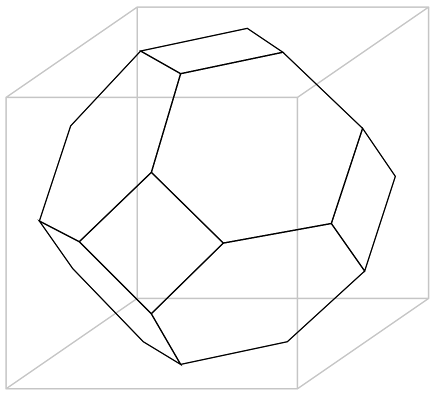
Le cuboctaèdre



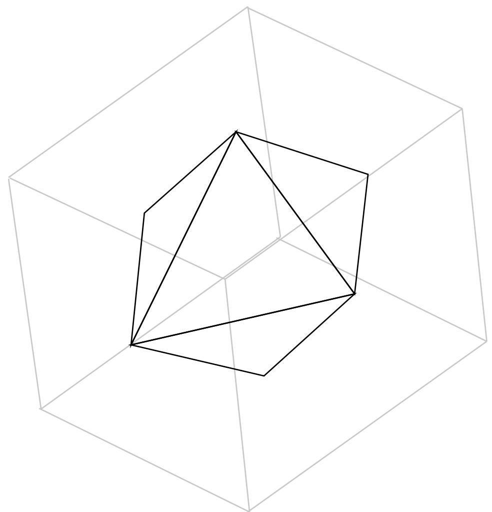


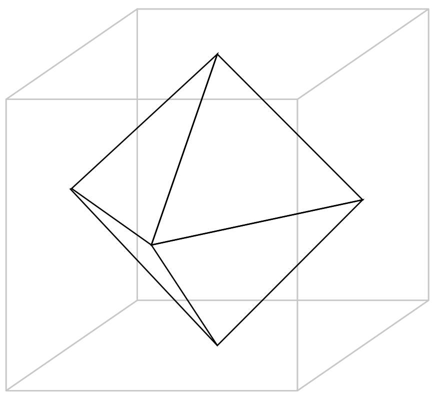
L’octaèdre tronqué



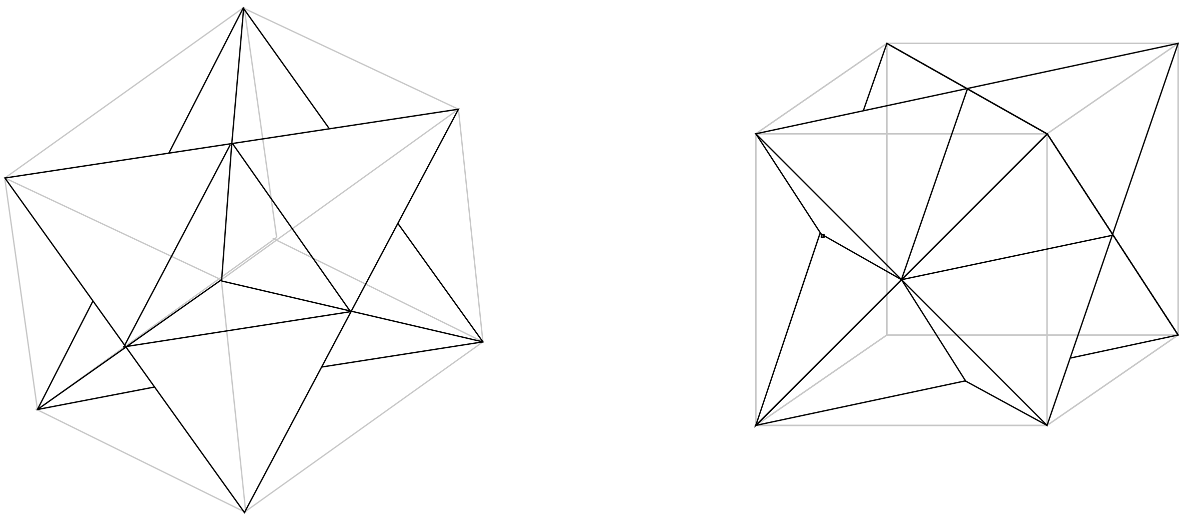


L’octaèdre régulier

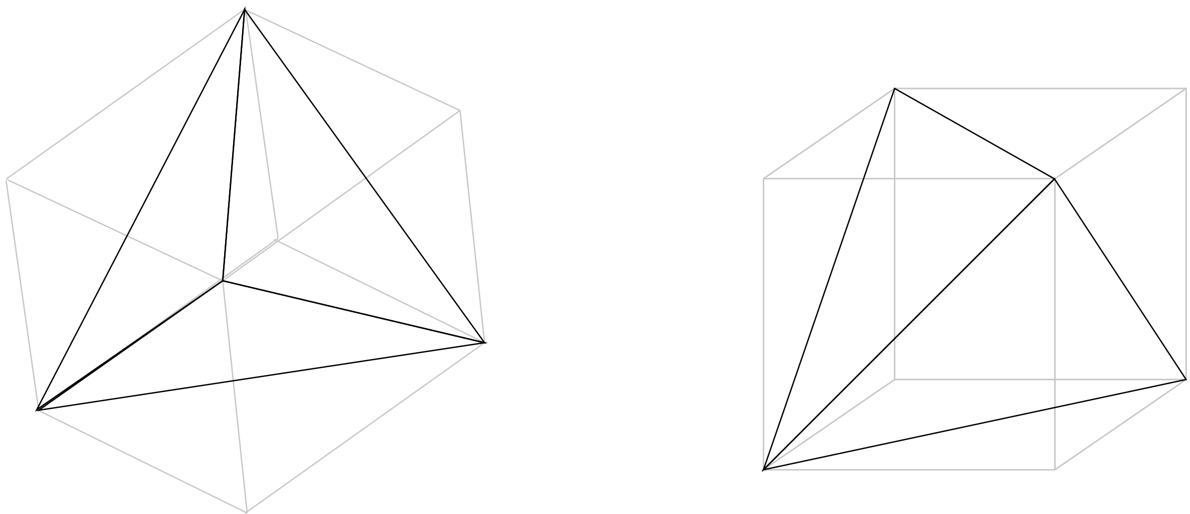




Le stella octangula

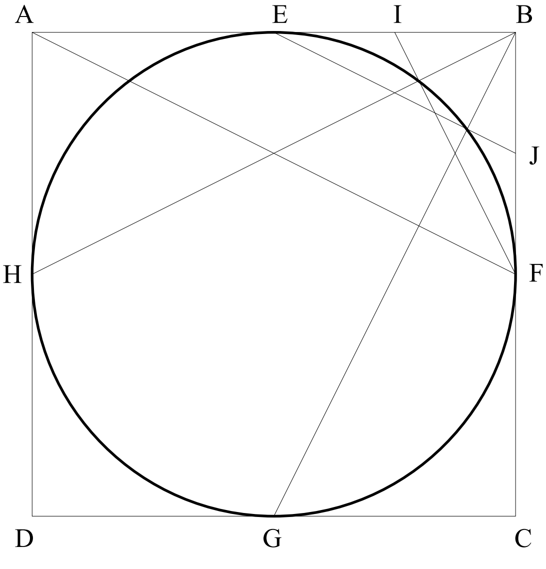


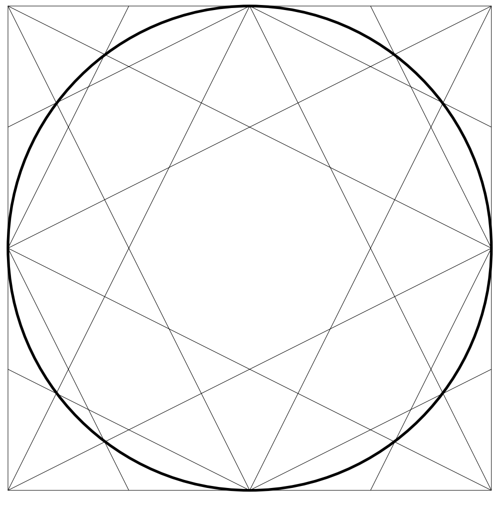
Un des deux tétraèdres réguliers



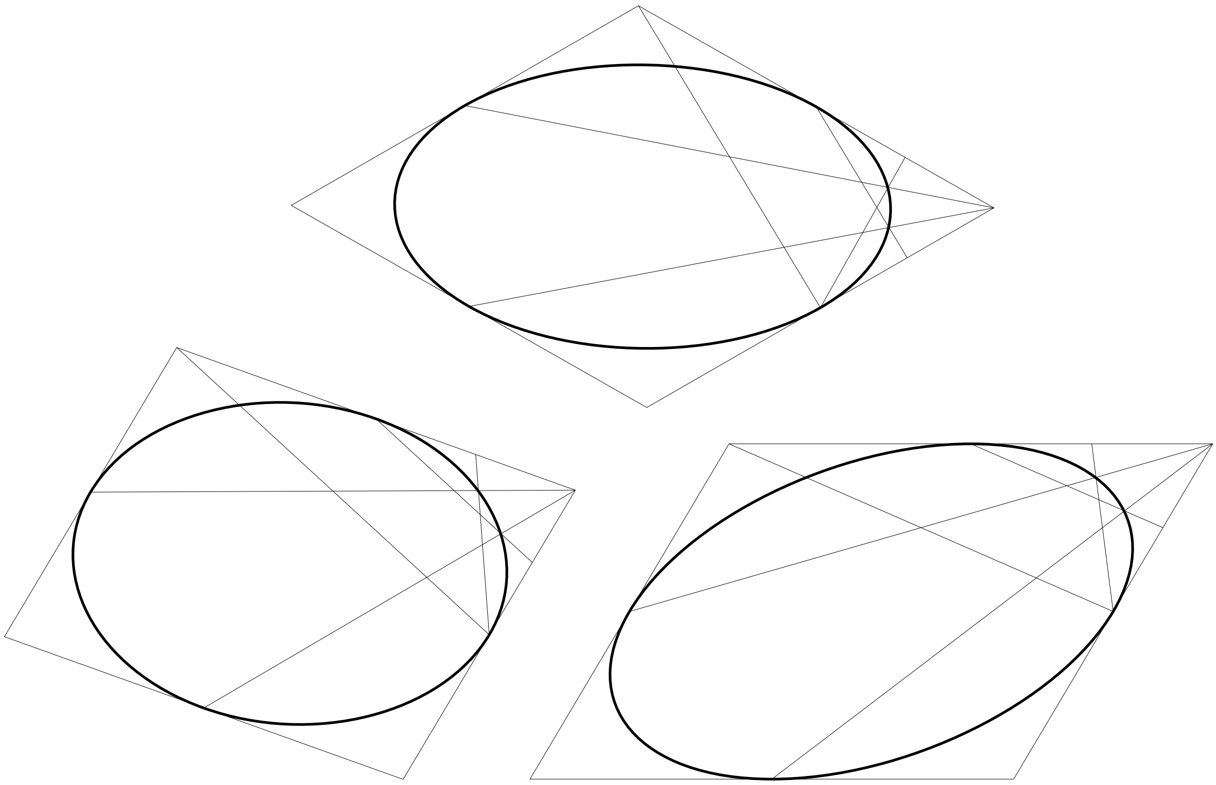
7 - “Corps ronds” inscrits dans le cube

- On peut représenter en perspective cavalière les cylindres, cônes et boule qui s’inscrivent dans le cube. Pour cela, il nous faut représenter un cercle en perspective. C’est une ellipse tangente aux milieux des côtés du parallélogramme image d’un carré circonscrit et qui passe par 8 autres points, 2 par quadrant

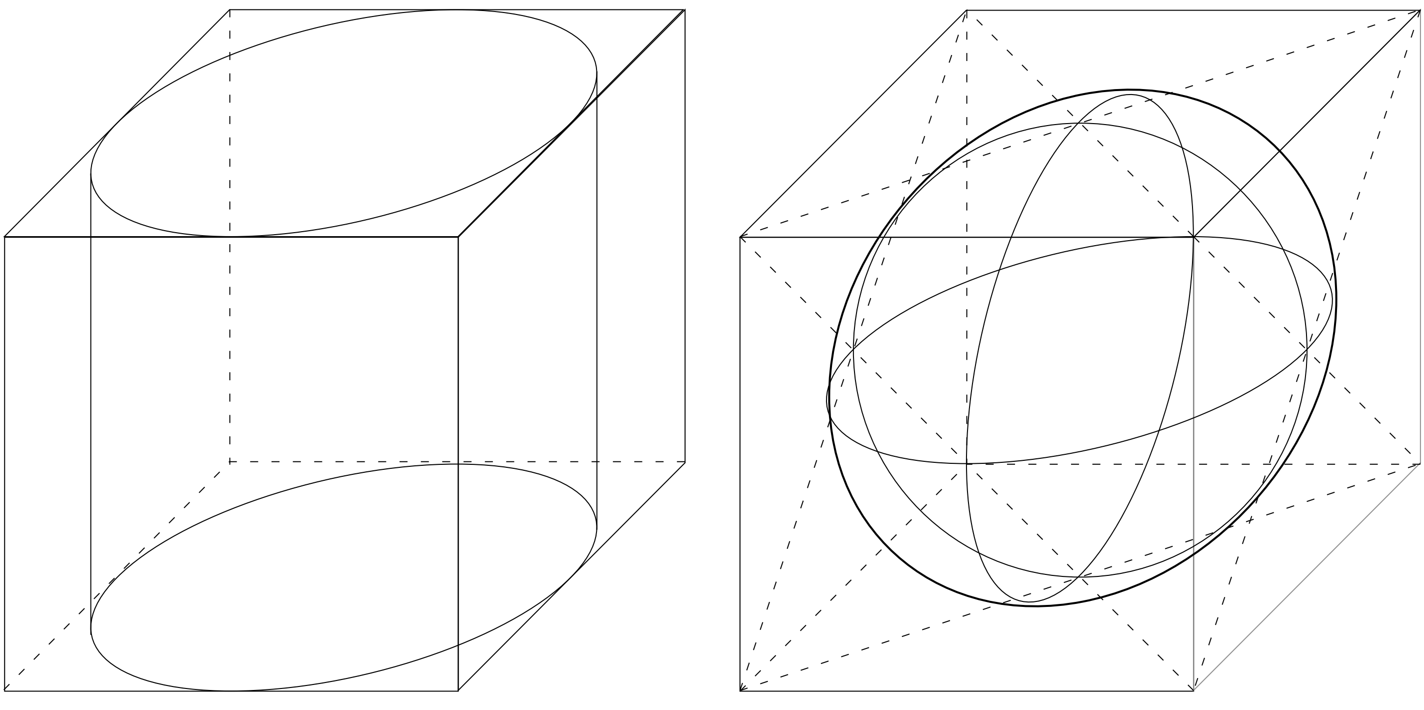




Voici donc la perspective du cercle inscrit dans un carré dont on connaît le parallélogramme perspective



On en déduit facilement la perspective d'un cylindre ou d'une boule inscrits dans un cube dont on a une perspective.



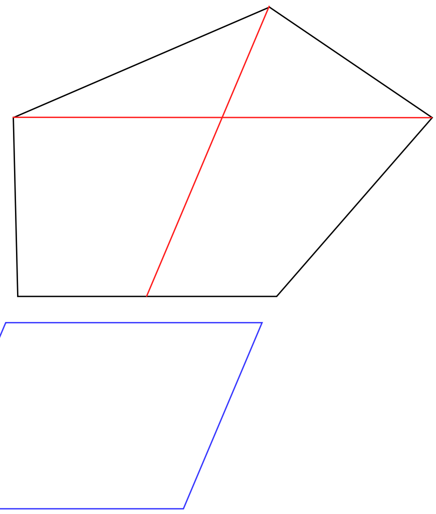
II - Perspectives cavalières d'une pyramide et d'un prisme droits à base régulière ou d'un prisme régulier

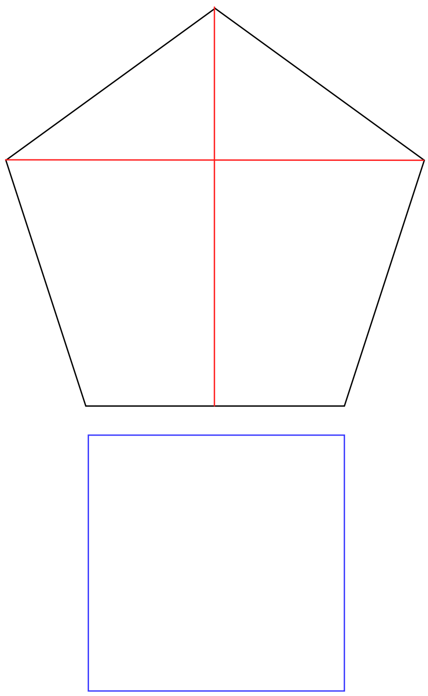
Problème 2 : voici le même cube d'arête a, en perspective cavalière, dans une position quelconque. Comment représenter, dans la même perspective, les prismes et antiprismes réguliers, de même arête a et de même plan de base ?

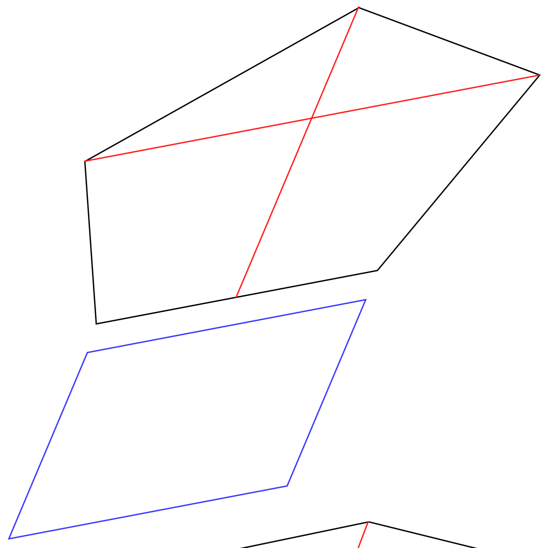
1 - Perspectives cavalières d'un polygone régulier

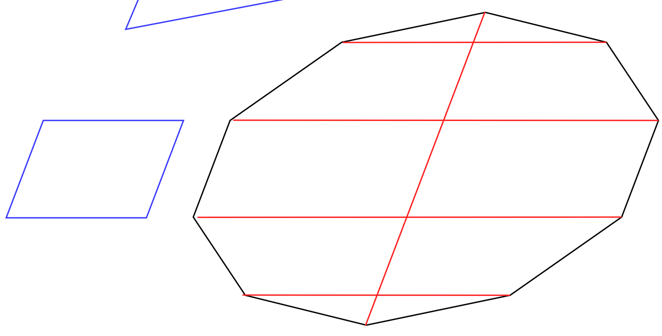
Le carré du côté est représenté par un parallélogramme. En prenant ce côté et sa médiatrice ; puis en traçant les diagonales parallèles au côté, on repère tous les sommets du polygone. Cette configuration de segments sera nommée “squelette du polygone régulier”.

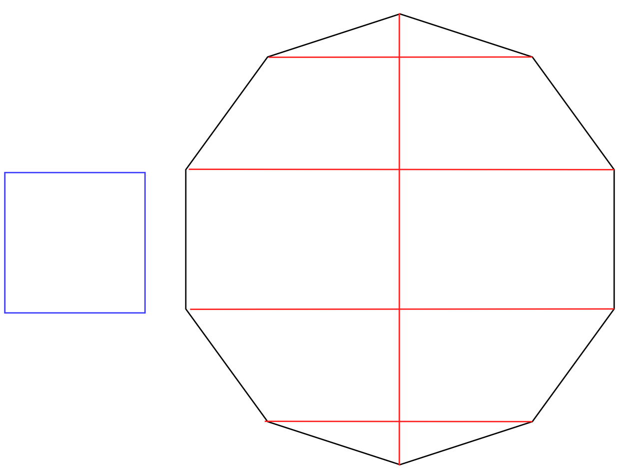
Il suffit de tracer le côté, sa médiatrice parallèle aux autres côtés du carré, les points d'intersection des diagonales et leur longueur grâce au théorème de Thalès

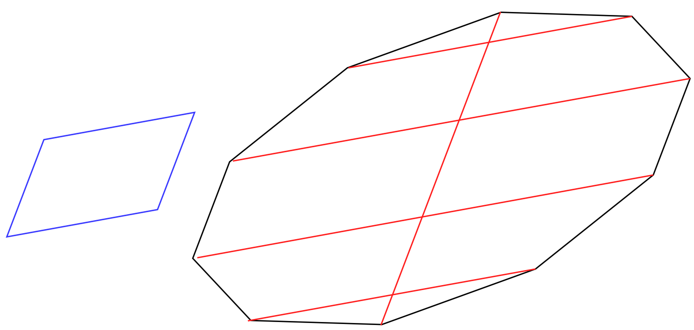








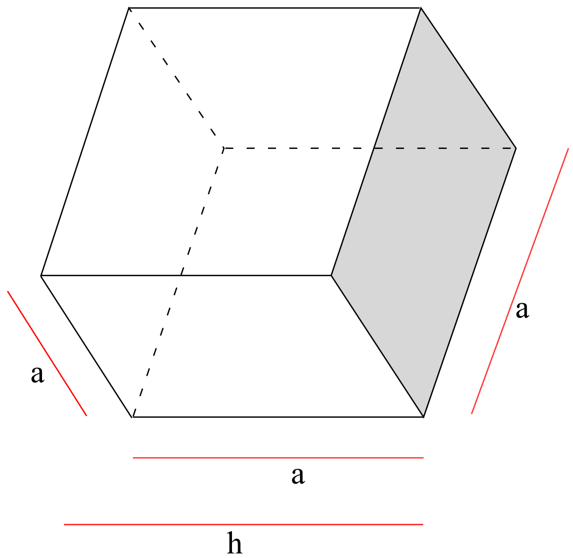


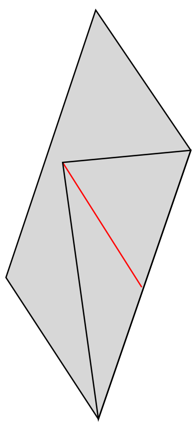


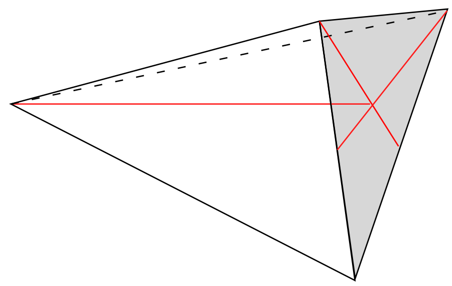
2 - Perspectives cavalières d'une pyramide et d'un prisme droits à base régulière

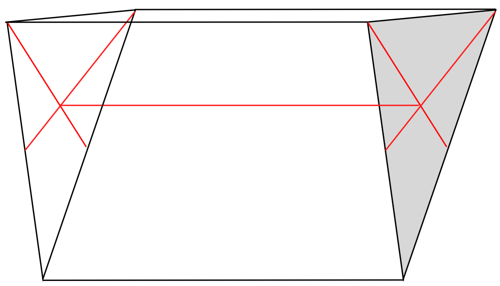
Voici un cube d'arête a, en perspective cavalière obtenu page 2. Le but est de dessiner une pyramide et un prisme droits à base triangle ou hexagone régulier de côté a, dans le plan de la face grisée et de hauteur h donnée.

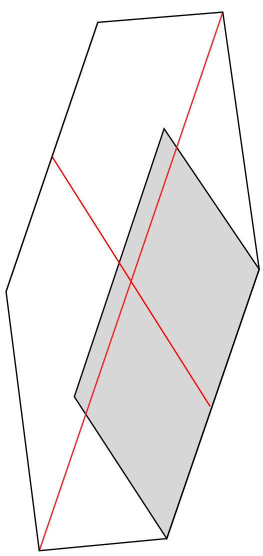
Le triangle équilatéral a une hauteur a et l'hexagone régulier est formé de 6 triangles équilatéraux Il est facile d'en tracer le squelette dans le plan de la face grisée. La hauteur sera reproduite perpendiculairement à cette face grâce au théorème de Thalès.

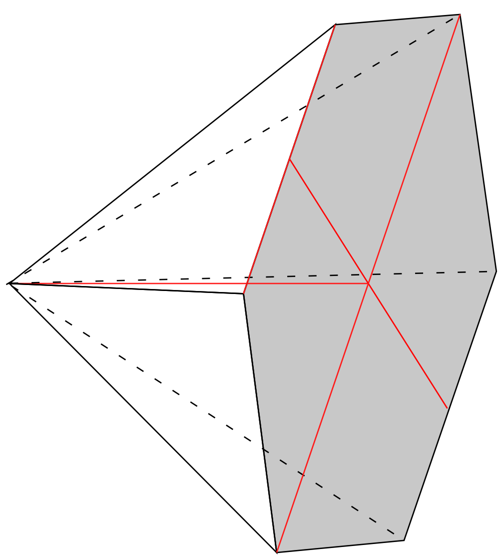






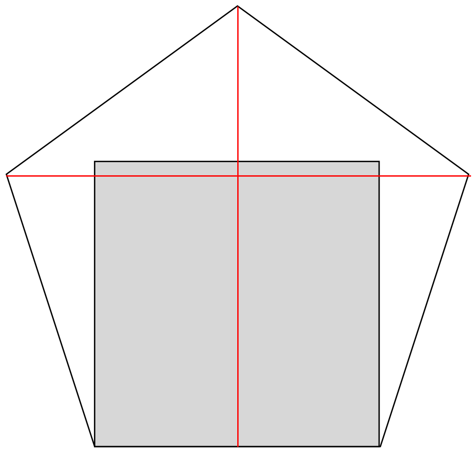


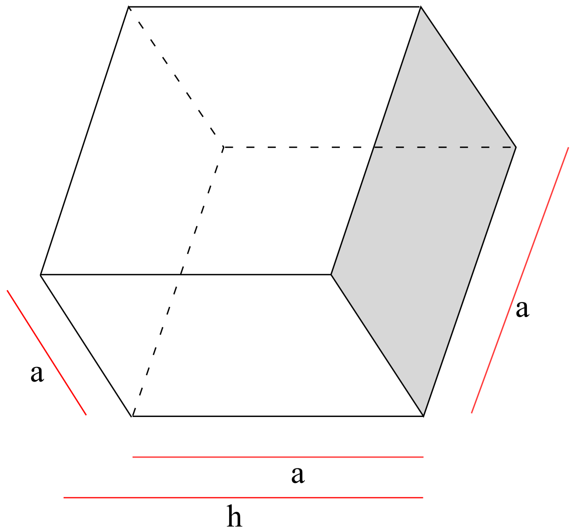


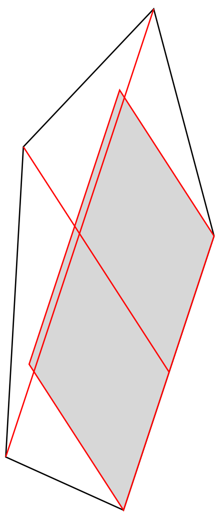


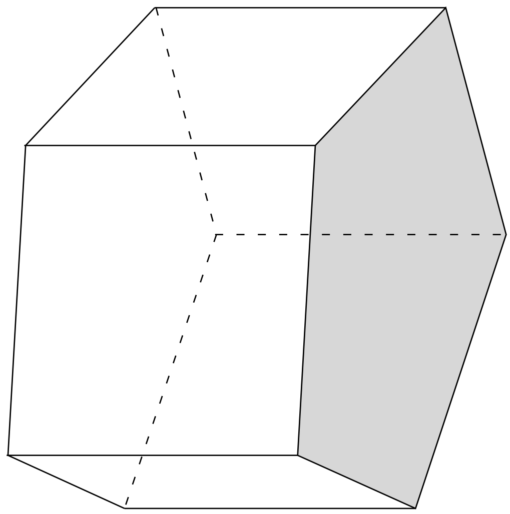
3 - Perspectives cavalières d'un prisme régulier

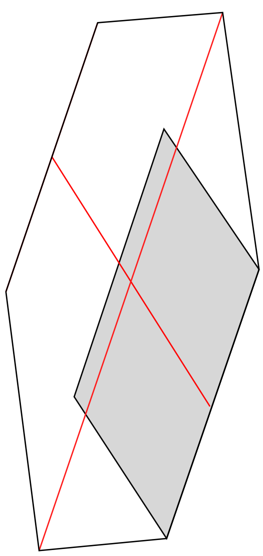
Un prisme régulier est un prisme droit formé de deux bases polygones réguliers reliés par une bande latérale de carrés. Le cube est le prisme régulier à base carrée.
Voici le cube de la page 2. Le but est de dessiner les prismes réguliers à base pentagonale et hexagonale, de même arête et dont la base est dans le plan de la face grisée.

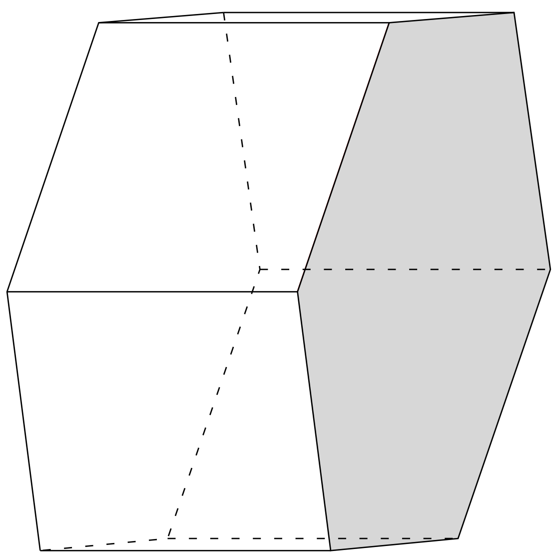










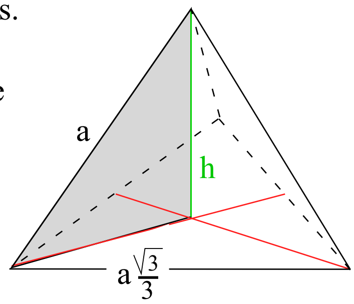


III - Perspectives cavalières d'un solide de Platon ou d'Archimède

Problème 3 : voici le même cube d'arête a, en perspective cavalière. Comment représenter, dans la même perspective, les autres solides de Platon : tétraèdre, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre réguliers, ou encore les solides d'Archimède ?

1 - Mesures dans les solides de Platon

L'octaèdre régulier inscrit dans un cube d'arête a s'obtient par troncature à la totalité des arêtes. Nous avons vu plus haut (I - 4) que les plans de deux faces opposées coupaient une diagonale en trois parties égales. La distance de deux faces opposées est donc a $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ses plans diamétraux sont des carrés de côté son arête et de diagonale a. Donc son arête mesure a$\frac{\sqrt{2}}{2}$.
La hauteur d'un octaèdre, d'arête a, posé sur une face est donc a$\frac{\sqrt{6}}{3}$.
Ses faces opposées sont deux triangles équilatéraux symétriques par rapport à son centre dont les centres sont sur un axe de rotation d'ordre 3 perpendiculaire à ces deux faces.

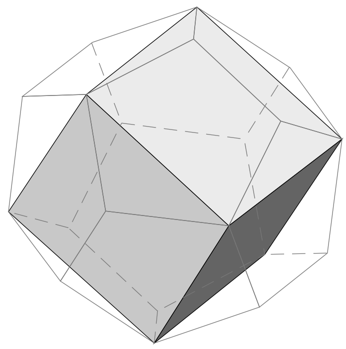


Le tétraèdre régulier d'arête a, posé sur une face, a son sommet à la verticale du centre de sa base. Dans le triangle rectangle formé par une hauteur du tétraèdre, une hauteur de sa base et d'hypoténuse une arête oblique, on a :

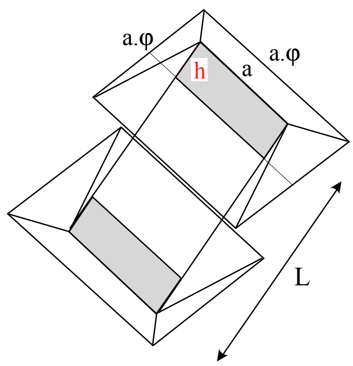
$h^2 + (a\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = a^2$.

On obtient : $h = a\frac{\sqrt{6}}{3}$ (comme pour l'octaèdre, ce qu'on peut voir en tronquant un tétraèdre par les milieux de ses arêtes).

L'icosaèdre régulier a ses arêtes opposées reliées par des rectangles d'or. Trois rectangles d'or, deux à deux perpendiculaires, portent ses 12 sommets.



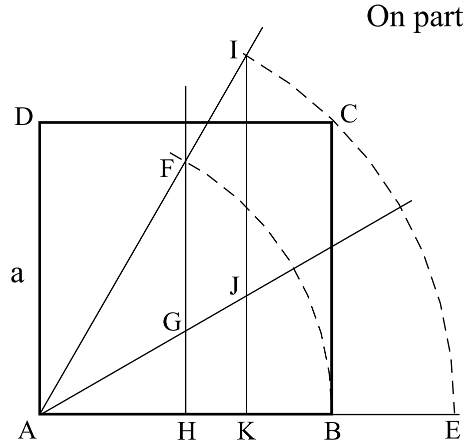
Le dodécaèdre régulier d'arête a contient 5 cubes inscrits d'arête a.φ.
Si on découpe un de ces cubes, il reste 6 « toits à 4 pans » de base carrée de côté a.φ et la ligne de faîte mesure a.
Les sommets opposés sont les extrémités de 10 grandes diagonales, qui sont en même temps diagonales des cubes inscrits, et donc qui mesurent a.φ.$\sqrt{3}$.

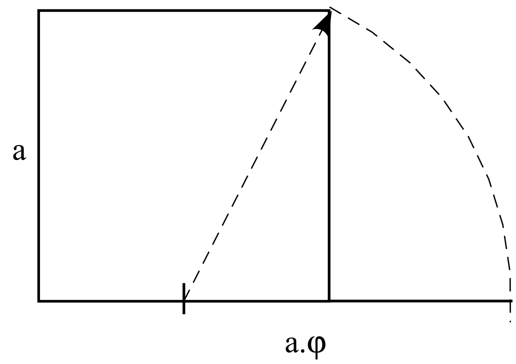


Les arêtes faîtières de 2 « toits » opposés délimitent un rectangle de largeur a et de diagonale a.φ.$\sqrt{3}$. Sa longueur L mesure a.(φ + 1), car :
$(a.(\varphi + 1))^2 + a^2 = 3.a^2.\varphi^2$.
Ce rectangle se partage en un rectangle central de dimensions a et a.φ, intérieur au cube, et 2 rectangles de dimensions a et $\frac{a}{2}$ intérieurs aux 2 « toits » opposés.
On en déduit que la hauteur du « toit » est : $\frac{a}{2}$

2 - Construction de ces mesures

On part du carré de côté a



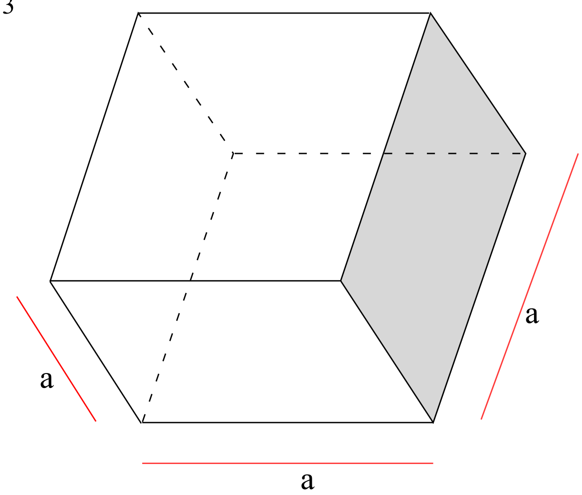


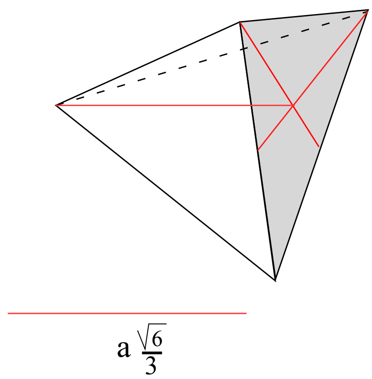
AB = a AE = $a\sqrt{2}$ FH = $a\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

FG = $a\frac{\sqrt{3}}{3}$ IK = $a\,\frac{\sqrt{6}}{2}$ IJ = $a\frac{\sqrt{6}}{3}$

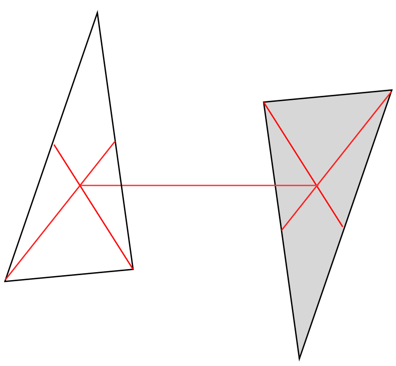
3 - Tétraèdre et octaèdre réguliers

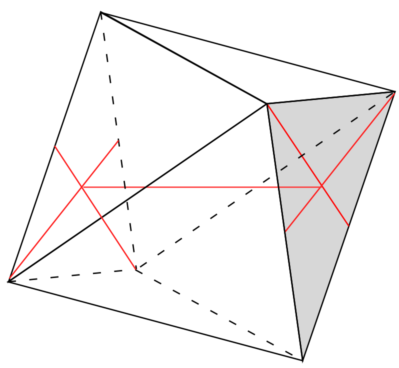
Le tétraèdre régulier est une pyramide centrée à base triangle équilatéral. Il suffit de construire sa hauteur $a\frac{\sqrt{6}}{3}$



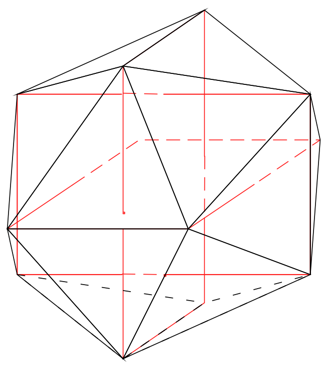


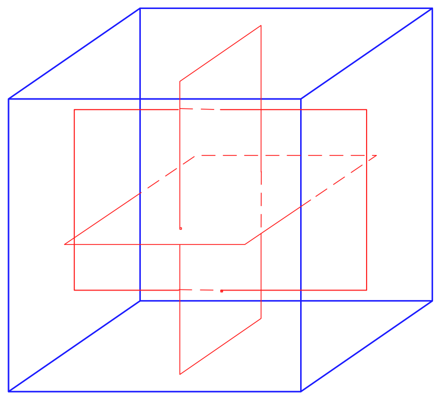
L’octaèdre régulier peut être vu comme un antiprisme à base triangulaire. Ilest formé de 2 faces triangulaires symétriques par rapport au centre du solide, reliées par une bande latérale de triangles équilatéraux. Sa hauteur, lorsqu’il est posé sur une face, est la même que celle du tétraèdre régulier.





4 - L’icosaèdre régulier

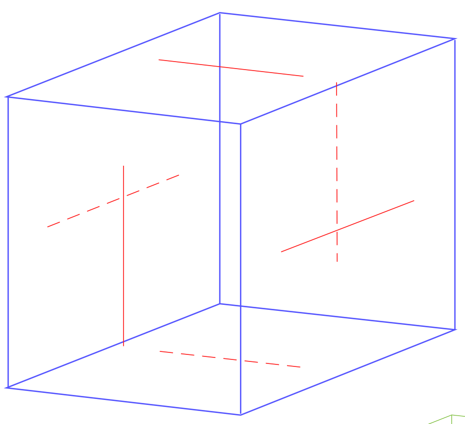


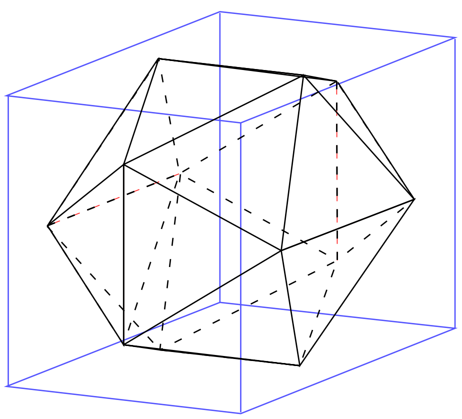


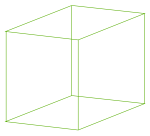
En observant un icosaèdre régulier, on voit que ses arêtes opposées sont les côtés opposés de rectangles Comme il se décompose en un antiprisme régulier à base pentagonale surmonté de deux pyramides à base pentagonale, on en déduit que ces rectangles inscrits sont des rectangles d’or.
Ils sont, par groupes de trois, perpendiculaires deux à deux. Donc l’icosaèdre d’arête a s’inscrit dans un cube d’arête a.φ . Les 3 rectangles sont dans les plans médiateurs des arêtes du cube et leurs largeurs sont les segments de médianes des faces construits (en rouge) au paragraphe précédent.

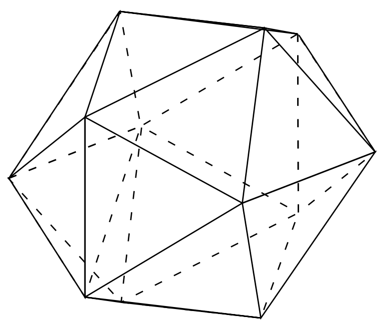
Pour construire un icosaèdre régulier d’arête a, dans une perspective cavalière quelconque d’un cube donné, On dessine, dans la même position les cubes d’arête $\frac{a}{2}$ (vert) et a.φ (bleu). Une médiane de chaque face est tracée pour qu’elles n’aient aucun point commun (rouge). Ces médianes sont réduites à la longueur a, autour de leur centre, grâce au cube vert.

Il reste à réaliser les faces en reliant chaque segment rouge aux extrémités les plus proches des segments rouges des faces contigües.

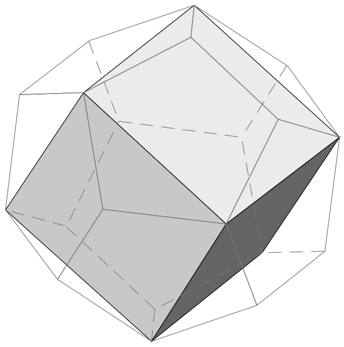




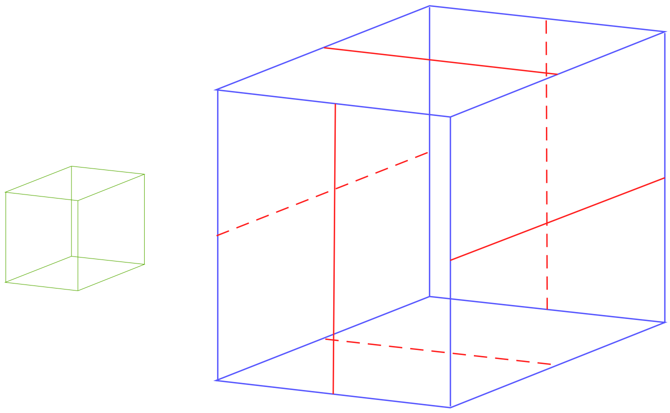


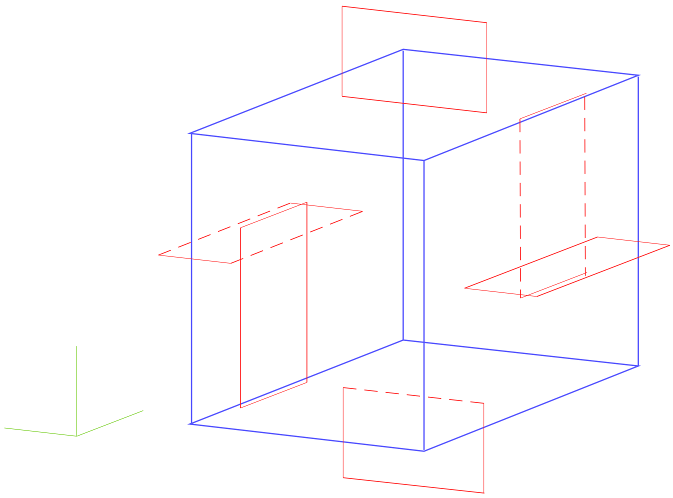


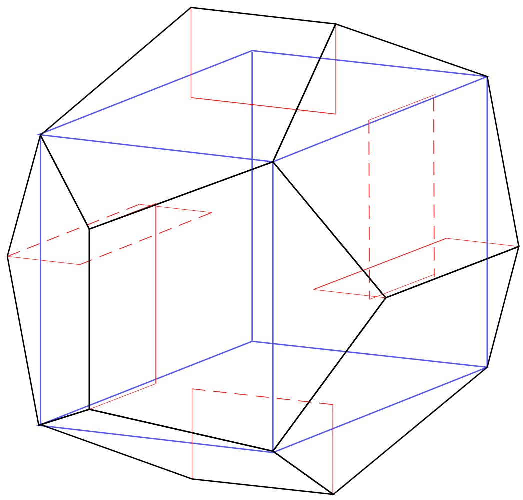
5 - Le dodécaèdre régulier



On dessine, dans la même position les cubes d'arête $\frac{a}{2}$ (vert) et $a\sqrt{2}$ (bleu), comme au paragraphe précédent. Chaque segment est ensuite translaté de $\frac{a}{2}$ selon une arête du cube vert pour donner l'arête faîtière d'un « toit ». Il reste à joindre les sommets du cube bleu aux extrémités des arêtes obtenues.







6 - Solides d'Archimède

En joignant les milieux des arêtes du dodécaèdre régulier, on obtient l'icosidodécaèdre !