Mathématiciens en herbe

activités de découverte en mathématiques

Jean BRETTE
Palais de la découverte – Paris

> Il n'est pas nécessaire qu'un problème de mathématiques ait des applications pratiques pour qu'il soit intéressant et il peut être très agréable pour l'esprit d'essayer de résoudre des questions apparemment futiles.
>
> Axel Thue, 1910

L’aventure mathématique que je souhaite évoquer commence au Palais de la Découverte en 1987. Michel Hulin, alors Directeur du Palais, initialisa deux actions en direction des très jeunes enfants.

La première était de concevoir des "expériences en libre service", simples et spectaculaires, en physique, biologie, etc., permettant aux enfants de prendre conscience, corporellement, de quelques principes fondamentaux en mécanique, acoustique, etc, ce qui a conduit à la création des salles dites "EUREKA".

La seconde consistait à étudier des animations pour des enfants de 10 -11 ans, à mettre en œuvre avec de petits groupes d'élèves. J’ai donc conçu un atelier de découverte en mathématiques, « Mathématiciens en herbe », consistant à placer les enfants dans une situation aussi analogue que possible à celle d’un(e) mathématicien(ne), face à un problème. Cet atelier a reçu depuis une trentaine de groupes par an. En 2000, durant l’année mondiale des mathématiques, j’ai eu l’occasion de pratiquer cet atelier dans deux écoles de la banlieue parisienne non pas pendant une séance unique de 1h30, mais pendant une année entière, au rythme d’une heure par semaine, ce qui permit des développements plus riches que je vais évoquer ici.

Faire des maths.

Faire des maths consiste, essentiellement, à se poser des problèmes, à les étudier, et éventuellement, à les résoudre. Ces problèmes peuvent provenir du monde qui nous entoure (technique, physique, astronomie, etc.), souvent en vue d’applications. Ils peuvent aussi provenir des maths elles-mêmes et il s'agit alors de curiosité, de désir de connaissance. Les applications pratiques, quand il y en a, sont plus difficiles à déceler. Par exemple, je ne connais aucune application pratique du fait qu'il existe une infinité de nombres premiers, et cela ne risque pas de changer, mais je suis quand même très heureux de le savoir.

Quant à "résoudre" un problème, c’est variable : un problème peut avoir de nombreuses solutions, ou une seule, ou pas du tout, et il ne s'agit pas seulement de "comprendre ce qui se passe" mais aussi d'apporter la preuve que ce que l'on a compris est vrai. C'est le rôle de la démonstration. Ainsi, par exemple, il y a une différence, à faire toucher du doigt, entre "je n'ai pas trouvé de solution" et " je peux démontrer qu'il ne peut pas y en avoir". L'activité mathématique comporte donc plusieurs étapes, en général imbriquées. Pour l'essentiel :

1) Prendre conscience qu'un problème se pose. C’est une question de goût, de curiosité personnelle, …ou de nécessité, quand ce problème peut être utile pour en résoudre un autre.
2) Formuler ce problème, c'est-à-dire préciser ce que l'on cherche, si toutefois on le sait dès le début. La formulation peut d'ailleurs évoluer en cours d’étude.
3) Explorer, et essayer de comprendre, (plus ou moins bien ... et si possible bien) ce qui se passe. La culture joue bien sûr un rôle important, mais aussi l'intuition, l’imagination. On essaie différentes stratégies, on pense à des analogies, on teste ses idées sur des cas plus simples, on cherche éventuellement des contre - exemples en cas de doute, etc. Quelquefois, "ça marche".
4) Concevoir et rédiger une démonstration. Ce point dépend grandement de l'efficacité du point 3 mais aussi de la connaissance, d'une part des outils ou des objets mathématiques en jeu, et d'autre part de certaines techniques de démonstration : c'est l'étape de la "rigueur".

S'agissant de très jeunes enfants, quelle est la situation dans le milieu strictement scolaire (selon moi, en France, et sans généraliser à tout prix car il existe des exceptions)?

Le point 1 n'est pas abordé, et comment pourrait-il en être autrement puisque c'est l'enseignant, ou l'auteur de manuel, qui propose. Il semble donc difficile d'éviter cet obstacle, c'est-à-dire de mettre *totalement* l'enfant en *situation de découverte autonome*.

Le point 2 n'est que très rarement abordé. Dans la majeure partie des cas, l'énoncé est fourni à l'enfant, et assez souvent sous une forme syntaxiquement complexe.

Le point 3 consiste pour une part (importante) à comprendre l'énoncé (c'est un peu de l'analyse grammaticale), et pour l'autre part à identifier les opérations à effectuer.

Enfin le point 4 consiste essentiellement à effectuer la (ou les) opération(s) nécessaire(s) : on construit *effectivement* la solution, car en général il y a une solution, et *une seule*.

Pour être plus nuancé, ajoutons que certains enseignants passent beaucoup de temps à analyser le point 3 avec leurs élèves, par exemple lors des corrections. Ajoutons aussi qu'une part importante de l'"activité mathématique", dans ces classes (et même plus tard), consiste en l'apprentissage et la maîtrise de certains outils et techniques, ou la connaissance de certains "objets mathématiques": nombres, formes géométriques, etc. C'est une activité de longue haleine, progressive, dont le schéma directeur est fixé par les programmes, et c'est une activité difficile, qui demande compétence, continuité dans le temps, patience... et une bonne connaissance de ses élèves. Cela dit, pour revenir à la question initiale de notre Directeur et pour autant que cette analyse sommaire soit correcte, comment le Palais peut-il intervenir?

En tenant compte du fait que nous ne connaissons pas les élèves au préalable, et qu'une séance ne doit pas excéder 1h30, ce qui est déjà beaucoup, il paraît difficile d'intervenir sur l'apprentissage d'outils, ou la familiarisation avec les objets. Par ailleurs, je vois mal pourquoi un enseignant viendrait au Palais faire entendre à ses élèves à peu près le même discours que celui de leur cours.

On a vu également que les points 1 et 2 peuvent difficilement être évacués : pour une activité aussi ponctuelle dans le temps, il faut bien que "quelqu'un" choisisse les problèmes.
Restent les points 3 et 4. Le problème est délicat dans la mesure où on aborde simultanément des problèmes heuristiques et des problèmes de démonstration, y compris le fait qu'il y a nécessité à la démonstration, ce qui n'est pas toujours aisé à faire percevoir. Par ailleurs, il s'agit d'aider les enfants à mener une authentique démarche mathématique, avec ses doutes, ses hésitations,ses moments d’enthousiasme ou de découragement, … Cela implique donc, en premier lieu :

1) qu'il soit facile de voir, et de comprendre, qu'il y a un problème,
2) que l'énoncé soit transparent sur le plan linguistique : il est inutile de superposer deux difficultés, maths et lecture ou compréhension de la langue,
3) que les objets mathématiques en cause soient bien maîtrisés, et donc très élémentaires,
4) que les situations à explorer soient motivantes, et assez riches sur le plan combinatoire.
5) que cette activité puisse être considérée comme ludique, au moins au début

Quelques exemples de problèmes.

Compte tenu des contraintes ci-dessus, j’ai donc proposé à l’époque de (tenter de) reconstituer des puzzles ou à (tenter de) résoudre de petits problèmes d'arithmétique. Ils étaient tous caractérisés par le fait qu'il semblait exister, a priori, un grand nombre de combinaisons à essayer, d’où la nécessité "de mettre de l'ordre". Par ailleurs, l'énoncé était transparent et le développement heuristique assez riche. Certains ont cependant été abandonnés après expérience avec les enfants (*Pb 3 et 4*).faute de motivations des élèves. En voici quelques - uns, sur lesquels le lecteur pourra exercer sa sagacité :

Problème 1 : Les dominos

fig 1

On dispose d’un carré de côté *6* dont la case noire en haut à gauche est condamnée (elle peut servir à vérifier que tous les quadrillages des enfants sont dans la même position). On dispose aussi d’un carré rouge et de *17* dominos couvrant chacun deux cases adjacentes du quadrillage. Si le carré rouge est en *a* ou en *b*, (ou ailleurs !) peut-on couvrir les cases blanches restantes avec les dominos?

Problème 2 : Un carré de côté 5 et des équerres

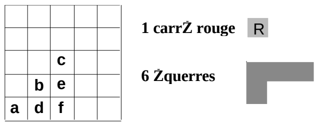


fig 2

On dispose d'un carré rouge et de *6* pièces en forme d’équerre couvrant 4 cases. Peut-on couvrir ce quadrillage avec les équerres quand le carré est en: *a, b, c, d, e,* ou *f* ?

Problème 3 : Peut-on couvrir un carré de côté *11* avec des carrés de côtés *3* ou *4* en quantité suffisante ?

Problème 4 : Peut-on couvrir un carré de côté *8* avec un carré de côté *2* et *15* équerres de *4* cases?:

Problème 5 : Construire un petit cube?

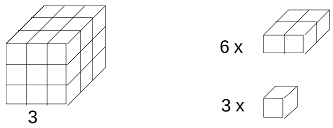


fig 3

Peut-on construire un cube de côté 3 avec les pièces ci-dessus?

Problème 6 : Et un gros ? (créé par J.H.Conway)

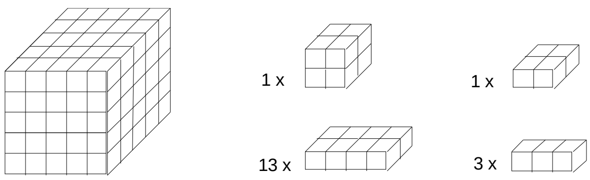


fig 4

Peut-on construire un cube de côté 5 avec les pièces ci-dessus?

Problème 7 : Les cavaliers (d’après un problème de Skolem)

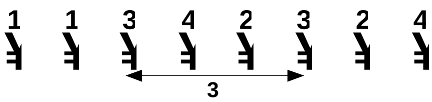
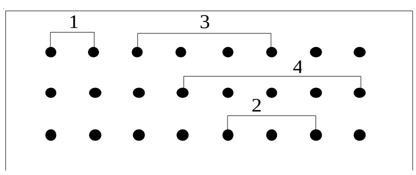


fig 5

8 points équidistants ont été numérotés avec les nombres de *1* à *4*, pris deux fois chacun, de façon que la distance entre deux nombres égaux soit égale à ce nombre. Peut- on de faire de même avec *2n* points en utilisant les nombres de *1* à *n* deux fois chacun?
Afin d’éviter les problèmes (et les erreurs) de comptage, le dispositif « concret » se présente sous la forme d’une planchette percée de plusieurs lignes de *2n* trous équidistants, et de cavaliers rigides matérialisant les distances de *1* à *n* , comme ci-dessous : (D’autre versions matérielles plus faciles à construire et à manipuler ont été réalisées depuis)



n = 4

fig 6

Problème 8 : Sans lever le crayon ? (graphes eulériens)

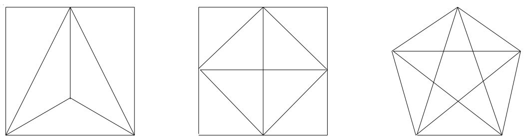


fig 7

Peut-on tracer ces dessins sans lever le crayon en passant sur chaque trait une fois et une seule ?

Problème 9 : Triangles magiques

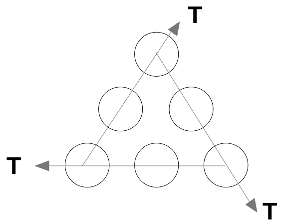


fig 8

Peut-on ranger les nombres de *1* à *6* dans les cercles de telle façon que la somme **T** des nombres le long de chacun des côtés du triangle soit constante ? Le même problème se pose avec 4 cercles sur chacun des côtés, et les nombres de *1* à *9*.

Les dominos.

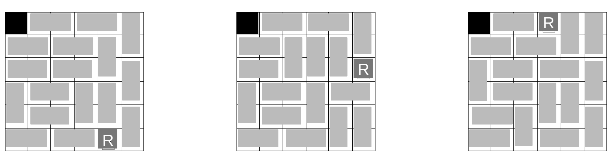
Ces problèmes ne se prêtent pas tous à une activité inscrite dans la durée. Je ne parlerai donc que du premier, les dominos, exploré dans une classe de Villeneuve St Georges. En accord avec leur professeur, je venais toutes les deux ou trois semaines pour m'informer des progrès en cours, animer les discussions , répondre éventuellement à la curiosité des enfants,.L'animation des séances des autres semaines était effectuée par leur professeur. Il est impossible de rendre compte intégralement de la richesse des dialogues et des situations. Je ne donnerai donc ici que quelques indications sur le déroulement, et quelques exemples de dialogues, très abrégés (je n'ai pas mentionné les noms des élèves, mais évidemment, les réponses ne viennent pas toutes du même élève).

Après avoir fait connaissance, la discussion s'engage sur l'activité mathématique :

- A votre avis, qu'est-ce que c'est que : faire des maths ?
- On compte ?
- Oui, quelquefois, mais beaucoup de gens comptent, sans être mathématiciens ; par exemple les comptables, les commerçants. On ne fait pas que compter.
- On réfléchit ?
- C'est vrai, mais il y a aussi beaucoup de gens qui réfléchissent, du moins je l'espère.
- On fait des problèmes ?
- Tu veux dire qu'on les résout ?
- Oui.

- C’est ce qui arrive quand cela se passe bien ! Mais c’est vrai, une grande partie de l’activité d’un mathématicien consiste à se poser des problèmes, à les étudier, et à essayer de les résoudre. C’est ce que je voudrais vous proposer aujourd’hui : vous mettre face à un problème comme de vrais mathématiciens, ou mathématiciennes..
- Mais alors, c’est comme d’habitude !
- Pas tout à fait. Le plus souvent, dans les problèmes qu’on vous donne à l’école, on vous pose des questions très précises : a) faire ceci, b) faire cela, c) en déduire ceci et cela, d) etc. Mais quand un mathématicien s’attaque à un problème que personne ne sait faire, il n’y a évidemment personne pour lui dire fait ceci, fait cela. Il faut qu’il cherche tout seul, qu’il devine ce qu’il faut faire. C’est cela que je veux faire avec vous.
- Ça va être dur !!
- Ce n’est pas sûr. Voici un problème : je vais vous donner un quadrillage de *6* cases sur *6*, un par table de *2* élèves. Vous placerez ce quadrillage devant vous, la case noire en haut, à gauche. Vous voyez qu’une case est rouge, et ce n’est pas la même pour tous. Je vous donne aussi un carré rouge, et *17* dominos, qui couvrent deux cases chacun. Le problème est le suivant : si l’on place le carré rouge sur la case rouge,ou ailleurs plus tard, est-ce qu’on peut couvrir toutes les cases blanches qui restent avec les dominos ?
- C’est tout ?
- Oui, c’est tout. Est-ce que tout le monde a compris ?
- Oui. Alors c’est facile ! (*la classe a l’air unanime*) On commence ?
- Attendez.J’ai dessiné le même quadrillage, en grand, sur le tableau. Chaque fois que l’un d’entre vous aura réussi, il viendra inscrire un **F** – comme **F**ini, ou comme **F**acile – dans la case où était situé son carré rouge. Ensuite, il placera son carré rouge sur une case que personne n’a encore essayée. Le but du jeu est de les essayer toutes.

L’exploration commence, avec un va et vient des élèves entre leur table et le tableau. Tous n’utilisent pas la même stratégie pour repérer la position du carré rouge : certains mémorisent la ligne et la colonne, d’autres se repèrent à partir du bord le plus proche, leur voisin de table corrige éventuellement à distance, etc. C’est un excellent exercice de repérage. Cinq minutes plus tard, de nombreux élèves ont réussi, par exemple :

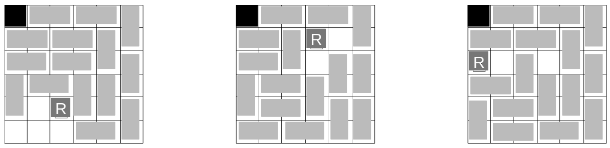


facile facile facile

fig 9

Je dois faire ici une remarque : presque tous les élèves suivent la règle : on place le carré rouge, *puis* on essaye de ranger les dominos., Mais il arrive, et notamment à Villeneuve, qu'un élève ou deux soient particulièrement rapides, au point que celui qui écrit au tableau n'a pas le temps de s'asseoir ! En fait, ils ne suivent pas la règle : ils posent *d'abord* les dominos, et ne placent même pas le carré dans la case vide restante ! Ensuite, il leur suffit de pousser un domino voisin à la place du vide pour obtenir une nouvelle solution, qui déplace donc la case vide de deux cases. Désobéir est ici terriblement efficace ! Cela montre au passage qu'un énoncé, même très simple, peut quand même être directif. Malgré cette constatation, j'ai toujours continué à donner le même énoncé, pour voir combien d'élèves choisiraient l'efficacité à l'obéissance ! Il y en a peu !

Cela dit, un tiers des élèves n'y arrive pas. Ils buttent au dernier moment sur des situations comme celles- ci :



? ? ?

fig 10

La situation est tendue, car certains élèves qui ont réussi se moquent des autres. Il suffit alors de leur proposer d'essayer pour qu'ils s'arrêtent. Personne n'y arrive ! Je fais alors une proposition :

- Ceux qui n'y arrivent pas vont inscrire au tableau un **?** au lieu d'un **F**, afin d'indiquer qu'ils ont essayé. Ensuite, ils ont le choix : soit ils essayent une autre position pour le carré rouge, soit ils continuent avec la même.

Quelques uns continuent avec la position initiale, d'autres changent, et quelques minutes plus tard, le tableau récapitulatif ressemble à ceci :

	F				F
	?	F	?		?
?					F
				F	
	F	?		?	
F		F		F	

fig 11

J'interviens de nouveau :

- On n'a pas encore tout essayé mais, à votre avis, est-ce que les **F** et les **?** sont rangés, ou est-ce qu'ils sont distribués au hasard ?

- ??? *(Les élèves hésitent)*
- Bon, on continue encore un peu.

Quelques minutes plus tard :

■	F		F		F
	?	F	?		?
?	F				F
	?		?	F	
	F	?	F	?	
F		F		F	

fig 12

- Et maintenant ?
- Ah oui ! Il y en a un sur deux qui marche !

Les formulations varient: « c'est comme un damier », ou « ils sont en diagonale », mais les enfants ont bien deviné ce qui se passe, et on remarque ensemble qu'on peut dire la même chose de *plusieurs façons*. On vérifie alors systématiquement les cases manquantes : cela ressemble bien à un damier, et tout le monde à l'air satisfait.

- Ça y est, on a fini !
- Hum ! On a effectivement trouvé des cases où c'est facile, mais pour les autres ? Qui pense que c'est possible ? (*des mains se lèvent, une bonne moitié*) Qui pense que c'est impossible, et qu'on ne trouvera pas, même si on cherche plus longtemps ? (*quelques mains se lèvent*) Qui garde un silence prudent ? Qui pense que c'est une question intéressante ? (*presque tous*) Qui *sait* que c'est impossible ? (*deux élèves lèvent la main. Je m'adresse à l'un d'eux*). Comment le sais-tu ? Tu es sûr ?
- Oui, j'en suis sûr !
- Pourquoi ?
- A la fin, on tombe toujours sur la même chose : soit un trou en forme de T, soit deux cases qui se touchent par un coin, soit deux cases espacées d'une case (fig 11) (*les autres élèves acquiescent*)
- C'est vrai, mais ce n'est pas une preuve. En commençant autrement, ça marcherait peut-être? (*le doute s'installe, et l'élève paraît moins sûr mais pourtant*…..)
- Oui, mais … je suis sûr quand même !
- Tout le monde est d'accord avec lui?
- Oui (*maintenant, presque tous sont d'accord*)
- Très bien. Au début, tout le monde pensait que ce serait facile. Mais, après exploration, on

voit qu’une case sur deux est difficile, et même peut-être impossible. La question a donc changé. Elle est maintenant : comment savoir si c’est possible ou non ? Qui a une idée ?

- Il suffit d’essayer !
- On a déjà essayé, beaucoup.
- Oui, mais je veux dire essayer *toutes* les façons de poser les dominos, et on saura !
- C’est entendu : si on essaye tout, on saura, mais cela risque d’être long ; il y a beaucoup de façons différentes de ranger les dominos. Alors ? (*une élève prend la parole*)
- C’est à cause du carré noir, en haut.
- Qu’est- ce que tu veux dire ?
- ???
- Tu me dis que c’est de la faute du carré noir. Je veux bien, c’est possible, mais est-ce que tu pourrais le dire autrement ?
- Euh …(*elle réfléchit*) je veux dire que si le carré noir était ailleurs, ça se passerait autrement.
- Tu veux dire que si on déplaçait le carré noir d’une case, par exemple, les cases faciles deviendraient difficiles ?
- Oui. (*elle a l’air sûre d’elle*)
- Tu pourrais me dire pourquoi ?
- Non, je ne sais pas pourquoi, mais j’en suis sûre !
- Tu as peut-être raison. On garde ton idée de côté. Quelqu’un a-t-il une autre idée ?
- ???? Non.
- L’idée d’essayer tout est une bonne idée, mais il y a trop de possibilités, et il faudrait être sûr de ne pas en oublier. Si le quadrillage était plus petit, ce serait plus facile, non ?
- Oui, mais ce n’est plus le même problème !
- D’accord, mais ça ressemble. Ça pourrait peut- être nous aider à comprendre ? On essaye ?
- Oui.
- Quelle taille on choisit ?
- (*les élèves font plusieurs propositions*) : 3 , 5 , 4 ? (*je choisis le carré de côté 3 et dessine le quadrillage au tableau*)
- Combien y a- t- il de cases, en tout ? (*certains comptent les cases, d’autres calculent 3* x *3*)
- *9.*
- Et si on retire le carré noir et le carré rouge, il en reste combien ?
- *7.*
- Combien faut-il de dominos pour couvrir exactement 7 cases ?
- (*certains proposent 3, d’autres 4, et finalement, après quelques secondes, quelques élèves disent*) C’est impossible !

- Pourquoi ?
- Parce que *7* est un nombre impair !
- Très bien. Donc, quand le côté du carré est égal à 3, il n'y a pas de solutions du tout. Et avec un côté *5* ?

Je passe cette séquence : on compte le nombre de cases : *5* x *5* = *25*, Il reste *23* cases pour les dominos, c'est donc impossible. On réfléchit ensuite pour les côtés *7*, puis *9*, puis *1*, où on ne peut même pas placer le carré rouge, et l'idée émerge que, lorsque le *côté* est impair, c'est impossible.

Extrait du dialogue :

- Attention ! Pour le côté *3*, par exemple, c'est impossible parce qu'il reste *7* cases à couvrir, et que *7* est un nombre impair, mais c'est à cause du *7* qu'on arrive à dire que c'est impossible, et non directement parce que *3* est un nombre impair. On a calculé *3* x *3* = *9*, qui est un nombre impair, puis on a retiré les deux carrés noir et rouge, ce qui donne 7, qui est aussi impair, et on a conclu. Pour le côté *5*, on a calculé *5* x *5* = *25*, puis *25 – 2* = *23*, et on a conclu parce que *23* est impair, mais pas parce que *5* est impair. Pour qu'on puisse dire que c'est toujours impossible quand le *côté* est impair, il faudrait être sûr que lorsqu'on multiplie un nombre impair par lui-même, on obtient toujours un nombre impair. Qu'en pensez-vous ? Est-ce que c'est toujours vrai ? (*les élèves hésitent, et il est visible que certains font des essais mentalement*)
- (*un élève*) Il n'y a qu'à essayer !
- *(un autre élève*) Tu es fou ! Tu as vu combien il y en a !
- *(moi)* A votre avis, il y en a combien ?
- Beaucoup, à l'infini, autant qu'on veut, (*les réponses varient, mais la classe est unanime*)
- Oui, il y en a une infinité, on ne pourra donc pas les essayer un par un (*une élève intervient*)
- Il n'y en a que *5* !
- Pardon ?
- Il n'y en a que *5* !
- Lesquels ?
- *1, 3, 5, 7, 9*
- Et *11* ?
- Oui, il est impair mais c'est pareil.
- Pareil que quoi ?
- C'est pareil que *1* ! (*elle a l'air scandalisé que je n'aie pas compris tout de suite, ce qui n'est évidemment pas le cas, mais il faut jouer le jeu*)

C’est une excellente idée, mais peu d’élèves voient pourquoi. On analyse donc ensemble les étapes de la multiplication de *11* x *11*, puis celles de *21* x *21*, puis celles de •••••*1* x •••••*1*, pour se convaincre que les premiers chiffres du nombre n’interviennent pas et que les carrés des nombres se terminant par *1* se terminent également par *1*. Une fois ce point compris, on cherche le dernier chiffre des carrés des nombres se terminant par *3, 5, 7, et 9* et on vérifie ainsi que le carré d’un nombre impair est aussi un nombre impair. Cette découverte, très naturelle, ne suscite aucun commentaire de la part des enfants. Je fais donc remarquer :

- Est-ce que vous rendez compte qu’on vient d’attraper tous les nombres impairs, en cinq minutes ? Et pourtant, il y en a une infinité !

Cette fois, les élèves se regardent entre eux, très surpris, puis réalisent la performance. Certains rient, d’autres applaudissent celle qui a pensé qu’il n’y avait que *5* cas à regarder, et non une infinité. Un moment intense.

- De plus, on a appris une autre chose, pour nos dominos : pour qu’il y ait éventuellement une solution, il est *nécessaire* que le côté du carré soit pair. On vient donc d’en éliminer la moitié.

On regarde alors le carré de côté *2*, pour lequel la solution est immédiate, mais qui montre que la cases opposée au carré noir n’est pas seulement *difficile*, mais réellement *impossible*. On explore ensuite carré de coté *4*, et en premier lieu les positions présumées « faciles » du carré rouge, en utilisant la symétrie diagonale du carré pour simplifier l’exploration. Elles sont effectivement « faciles » :

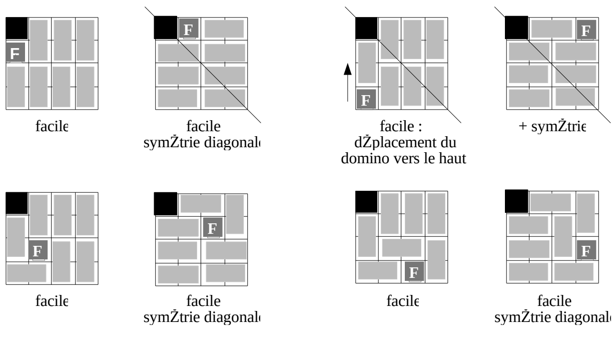


fig 13

On essaye ensuite les cases réputées « difficiles ». Fort heureusement, et comme les enfants le remarquent, c’est très simple car il n’y a pratiquement jamais de choix , sauf pour les deux dernières cases de la diagonale. Certaines cases contraignent la position d’un ou plusieurs dominos. Le domino 1 est imposé, puis le 2 aussi …. et on arrive à une obstruction :

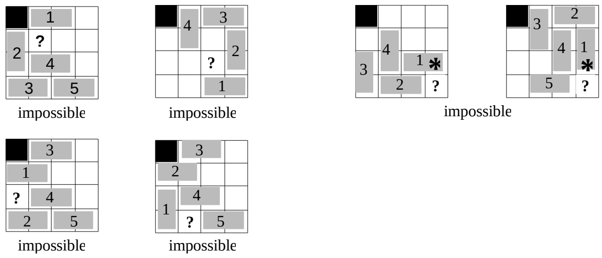


fig 14

Toutes les cases « difficiles » sont donc en fait « *impossibles* ». Voici le tableau récapitulatif :

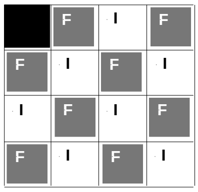


fig 15

L’analogie avec le carré de côté *6* obtenu au début est nette, ce qui très encourageant, mais il est clair, après un ou deux essais, qu’on ne pourra pas utiliser la même méthode pour le carré de côté *6*. Il faudrait une autre idée. Certains élèves pensent ajouter simplement deux lignes et deux colonnes et les couvrir avec des dominos, d’autres leur font remarquer qu’il pourrait exister d’autres solutions. Je passe cette étape assez riche : les élèves défendent leur point de vue, vont au tableau expliquer aux autres, discutent, essaient de se convaincre mutuellement, etc. J’interviens de nouveau.

- On a joué sur un quadrillage blanc. On aurait peut-être eu plus d’idées si on avait joué sur un damier coloré, comme sur la fig 15. Si je pose un domino, combien couvre-t—il de cases ?
- Deux !
- D’accord, mais de quelles couleurs ?
- Une blanche et une grise. (*avant d’obtenir cette réponse, on a essayé plusieurs positions*)
- Très bien. Combien y a-t-il de cases dans le carré ?
- *16* !
- Et si on retire le carré noir et le rouge ?
- *14* !
- Combien faut-il de dominos ?
- *7.*
- Parfait. Quand je pose un domino, il couvre une case blanche et une grise. Si je pose deux dominos, ils couvriront …. ?
- *2* blanches et *2* grises.
- Et si je pose trois dominos… ?

- *3* blanches et *3* grises (*en chœur, comme une comptine*)
- Et si j'arrive à poser les sept dominos… ?
- *7* blanches et *7* grises.
- Combien y a-t-il de cases blanches et grises, au début ?
- *8* blanches et *8* grises.
- Attention, il y a le carré noir.
- Ah oui. *7* blanches et *8* grises.
- Donc, au début, il y a *7* blanches et *8* grises. Si on arrive à placer les sept dominos, on couvre *7* blanches et *7* grises, et il reste une case vide. Quelle sera sa couleur ?
- Grise!
- Nous y sommes : si on réussit à placer tous les dominos, le carré rouge sera nécessairement sur une case grise, c'est à dire une case « facile ». (*le dialogue est beaucoup plus long et, même arrivés à ce point, certains élèves ne comprennent pas l'idée. Je prends le problème différemment*) Ici, on a d'abord rangé les dominos, puis le carré rouge sur la case qui reste, comme certains l'avaient fait au tout début. Essayons de voir ce qui se serait passé si on avait placé le carré rouge sur une case blanche, même si on sait maintenant que c'est impossible. Une fois posé le carré, combien resterait il de cases ?
- *14* ?
- Oui, mais de quelles couleurs ?
- *6* blanches et *8* grises.
- Est-ce qu'il est possible maintenant de poser *7* dominos ?
- Non. C'est impossible. Il faudrait *7* blanches.
- C'est ça : après avoir placé les *6* premiers, si on le peut, il restera deux cases grises. On ne pourra donc pas placer le dernier domino. On note aussi que deux cases grises peuvent se toucher par un coin, ou être espacées d'une case blanche. C'est bien ce qu'on avait observé. On peut maintenant regarder le carré de côté 6. Combien y a –t –il de cases ?
- *36* !
- Combien y aurait-il de cases blanches et grises?
- La moitié : *18*.
- Non, vous avez oublié le carré noir.
- Ah oui. *17* blanches et *18* grises.
- Alors ?
- C'est pareil : le carré rouge doit être sur une case grise marquée **F**, sinon c'est impossible ! (*une élève lève la main*)
- Oui ?

- J'avais bien dit que c'était de la faute du carré noir !
- Oui, tu avais deviné, et c'était vraiment une bonne idée, mais maintenant tu sais pourquoi, c'est mieux, non ? Récapitulons .

  • On s'est posé un problème qui semblait facile pour tout le monde.

  • Après exploration, on s'est aperçu que certaines positions du carré rouge semblaient très difficiles, et qu'elles étaient disposées en damier.

  • On s'est posé la question de savoir si c'était vraiment impossible pour ces cases là.

  • On a essayé avec un carré plus petit, et on a vu qu'il était *nécessaire* que le côté du carré soit un nombre pair pour qu'il y ait des solutions.

  • Au passage, on a montré que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

  • En explorant systématiquement les carrés de côtés *2* et *4* on a vu que la situation était analogue à celle du carré de côté *6*, et que les cases « difficiles » étaient en fait *impossibles*.

  • En comptant les cases grises et blanches, on a trouvé un argument rapide permettant de conclure, même pour le carré de côté *6* : pour qu'il y ait une solution, il est *nécessaire* que le côté du carré soit pair et il est aussi *nécessaire* que le carré rouge soit sur une case « facile ». Cela ne garantit pas qu'il y ait une solution mais en fait on en a effectivement trouvé. (*un élève lève la main*)
- Oui ?
- Alors on a trouvé toutes les solutions ?
- Ça dépend ce que tu entends par *toutes* : on a trouvé toutes les positions favorables du carré rouge, mais pour chacune d'elles il y a de nombreuses façons de placer les dominos. Tu es d'accord ?
- Oui, je comprends.
- De plus, on en sait beaucoup plus. On sait comment faire pour étudier des formes bien plus compliquées que des carrés. Par exemple , peut-on couvrir la forme suivante avec des dominos (cette fois-ci sans les carrés rouge et noir) ? :

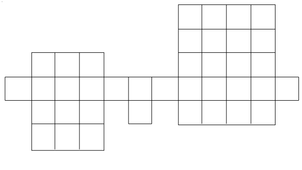


fig 16

Que faire ?

- Il faut vérifier s'il y a un nombre pair de cases.
- D'accord. Il y en a bien un nombre pair. Ensuite ?

- On fait un damier, et on compte les cases blanches et grises.
- Oui, c'est une bonne idée, mais on peut simplifier un peu, avant. Pour qu'il y ait une solution, il est *nécessaire* de placer un domino vertical, au centre. Ce domino sépare notre forme en deux parties, et pour que le problème ait une solution, il est *nécessaire* que chaque partie puisse être recouverte. On a donc transformé notre problème en deux problèmes plus petits et si l'un des deux n'a pas de solution, il est même inutile de regarder l'autre ! Ensuite, on peut essayer le coloriage en damier. Ici,dans la partie gauche, il y a 8 cases grises et 6 blanches : le problème n'a donc pas de solutions :

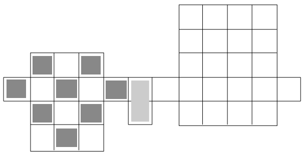


fig 17

J'étais loin d'imaginer que ma courte remarque sur le nombre de solutions aurait des conséquences. Quand je suis revenu, la fois suivante, les élèves cherchaient *toutes* les solutions pour le carré de côté *6*, un peu au hasard ! Leur professeur, qui avait choisi tout comme moi d'intervenir le moins possible, voulait voir comment ils allaient s'y prendre, et les élèves commençaient à se décourager devant l'étendue de la tâche.
Il était évidemment impossible de dire brutalement aux élèves qu'ils n'y arriveraient jamais. J'ai donc fait deux propositions : la première, comme nous l'avions déjà fait, consistait à compter *d'abord* toutes les solutions pour le quadrillage de *côté 4*. Nous verrions le cas *6* ensuite. La seconde consistait à introduire un peu de méthode et à partager le travail entre les élèves.
On choisit d'abord la position du carré rouge, puis une case vide **a** . On regarde alors toutes les façons de recouvrir cette case avec un domino et pour chacune d'elles, on place les dominos obligatoires, s'il y en a. S'il reste des cases libres, on choisit une nouvelle case, **b** , et on regarde de nouveau toutes les façons distinctes de la couvrir avec un domino. Je ne détaille pas cette séance, assez longue, mais après avoir vu le dessin (fig 18) un des élèves a remarqué que cela ressemblait à un arbre généalogique. Un autre a demandé si c'était comme ça que les ordinateurs jouaient aux échecs !

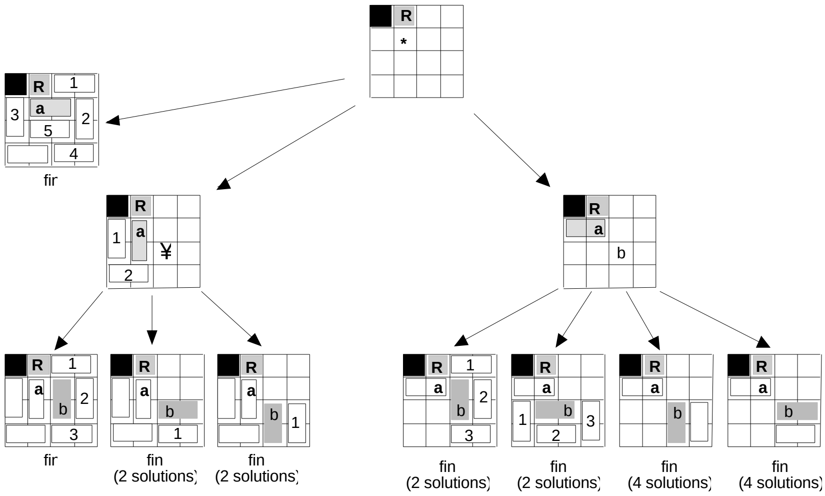


fig 18

Finalement, les élèves ont effectivement trouvé toutes les autres solutions, et ont fini par se convaincre qu'il était inutile d'étudier le carré de côté *6* puisque « ça serait trop long, et de toute façon, on sait comment il faudrait faire » !!! . Leur professeur m'ayant dit qu'ils avaient manifesté beaucoup d'intérêt pour cette activité de dénombrement, je lui suggérais, en privé, de leur proposer de déterminer le nombre de façons de couvrir un rectangle de $2 \times n$ avec des dominos, pour les premières valeurs de *n* , ce qui devrait les étonner

Quand je suis revenu la fois suivante, la classe était très surexcitée, et tout le monde voulait parler.

- Qu'est-ce qui s'est passé ?
- On avait trouvé quelque chose de « super », mais quand on continue, ça ne marche plus !
- Faites voir. (*les enfants avaient fait le tableau suivant, très soigné*)

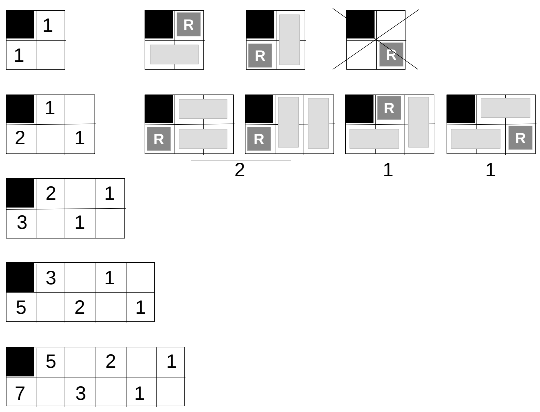


fig 19

- Qu'est-ce que c'est ?
- On a essayé avec des rectangles de *2* cases de hauteur, et de longueur *2, 3, 4, 5 et 6.*
- Je vois, c'est bien, mais que signifient les nombres dans les cases? (*les enfants se battent presque pour expliquer*)

- Quand il y a un nombre dans une case, c'est le nombre de solutions qui existent avec le carré rouge dans cette case ! Quand la case est vide, c'est impossible. On vous a montré des exemples sur le côté droit.
- Ah ! ça y est, j'ai compris. Vous avez bien travaillé, mais c'est quoi, cette chose extraordinaire qui ne marche pas ? (*Quand j'avais proposé cette activité à leur professeur, je n'avais pas précisé qu'on n'utilisait plus les carrés noir et rouge, mais pourquoi pas ? Finalement, avec les carrés c'est encore plus spectaculaire et révélateur !)*
- Il y en a deux. La première, c'est que si on lit la suite des nombres qui sont sous les carrés noirs, *1, 2, 3, 5, 7* , c'est la même chose que les nombres du dernier rectangle, mais à l'envers, avec un *1* en plus au début.
- C'est bien, mais qu'est-ce qui ne marche pas ?
- C'est l'autre chose ! (*et ils ont vraiment l'air déçus*) Au début, les nombres sont *1, 2, 3, 5*, et on a *1 + 2 = 3* ; *2 + 3 = 5* mais après ça ne marche plus : *7* n'est pas égal à *5 + 3* !
- Vous auriez préféré trouver 8 ?
- Oui (*en chœur*)
- Vous savez, les choses ne se passent toujours pas comme on l'espère. Mais j'ai une question : vous êtes sûrs que c'est bien *7*, et non *8* ? Vous ne vous êtes pas trompés ? (*les élèves sont saisis d'un doute*)
- Ça pourrait être *8* ? (*avec un mélange d'interrogation et d'espérance*)
- Je ne sais pas, il faudrait vérifier. (*en fait, je sais, mais je joue le jeu*)

Les enfants se mettent *tous* à vérifier,spontanément, avec autant de soin que d'excitation. Un quart d'heure plus tard, c'est la joie : il y a bien *8* solutions, et les enfants voudraient bien vérifier que ce phénomène continue avec les rectangles suivants. Comme ces vérifications risquent d'être longues, et n'apporteraient qu'assez peu d'informations supplémentaires, je préfère revenir sur le fond :

- C'est bien *8 = 5 + 3*. Félicitations ! Ça vous fait plaisir ? Quels seraient les nombres suivants ?
- *13* … euh … *21*…
- D'accord. Si ça continue, ce sera ça. Mais pourquoi cela continuerait ? Et pourquoi ce sont les mêmes nombres verticalement et horizontalement ?

Je ne détaille pas cette activité, qui occupa une séance entière. On commence par vérifier que le carré noir impose la position des dominos jusqu'au carré rouge (dans les cas où il existe des solutions). Il suffit donc de savoir quel est le nombre Dn de solutions pour un rectangle de *2* x *n* sans les carrés noir et rouge, ce qui était ma suggestion initiale.

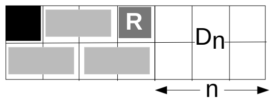
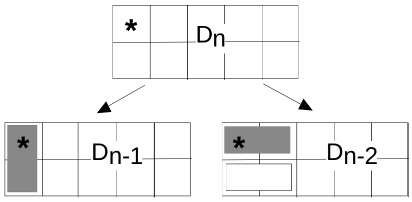


fig 20

La seconde étape reprend l’idée utilisée pour dénombrer les solutions du carré de côté 4 : la case marquée d’une étoile peut être recouverte de deux façons par un domino. S’il est vertical, il reste un rectangle de longueur *n – 1*, et ses propres solutions D_{n-1}. S’il est horizontal, il impose la position du premier domino et il reste un rectangle de longueur *n – 2*, et ses propres solutions D_{n-2}, d’où le phénomène observé par les enfants.



$$D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$$

fig 21

Cette séance se termina en parlant de Fibonacci et de son rôle dans l’introduction du système décimal en Europe du nord. J’en profitais aussi pour montrer quelques propriétés curieuses de la suite de Fibonacci. Les enfants étaient très motivés, et surtout ravis de pouvoir calculer le nombre de solutions sans avoir à manipuler les dominos ! Quand je suis revenu la fois suivante, quelques uns avaient calculé les soixante premiers termes de la suite. Fascination des grands nombres. Les quarante derniers étaient malheureusement faux, à causse d’une retenue oubliée, mais l’ordre de grandeur était correct, et certains élèves s’interrogeaient sur la vitesse de croissance de la longueur des nombres !

Conclusion

L'apprentissage des mathématiques, à l'école ou ailleurs, comporte traditionnellement plusieurs aspects distincts et complémentaires. En particulier, savoir multiplier est un savoir technique, savoir *quand* multiplier relève d'une compréhension plus profonde, qui touche aussi au langage. Bien entendu, ces deux savoirs sont liés et la majeure partie (sinon tous) des exercices proposés vise à vérifier l'acquisition de ces deux composantes. On pourrait dire de même de bien d'autres concepts mathématiques, à tous les niveaux : on vérifie, et c'est évidemment très utile, l'acquisition des connaissances sur des exemples prototypes.

« Mathématiciens en herbe » vise d'autres objectifs, tout aussi utiles : placer l'enfant en situation de recherche, c'est le mettre face à un défi qui lui demande de mobiliser l'ensemble de ses aptitudes et de ses connaissances pour explorer un problème, formuler des hypothèses, exprimer ses idées, les confronter à celles des autres, en tester le bien fondé, faire preuve d'esprit critique, et éventuellement apporter la preuve que ce qu'il a découvert est vrai. Ces différents points ne sont d'ailleurs pas l'apanage des mathématiques et peuvent évidemment être utiles dans d'autres activités, scolaires ou non. C'est donc une activité *globale* qui est proposée aux élèves, par opposition au contrôle "local" de ses connaissances et ces deux pratiques ne s'opposent pas, elles sont nécessaires toutes les deux, et complémentaires.

Ce qui apparaît tout d'abord au cours de cette aventure est l'extrême curiosité des enfants, leur motivation, leur imagination, leur désir de comprendre, même si tous n'ont pas réagi de la même façon. Sur une clase de 25, tous ont participé aux activités d'exploration et, pendant les discussions, 10 ont été particulièrement participatifs, 10 très attentifs mais peu bavards et 5 ont eu des difficultés de concentration et de compréhension.

Par ailleurs, et bien qu'il y ait finalement assez peu de mathématiques, au sens scolaire, dans cette activité de découverte, leur professeur m'a dit qu'en moyenne ils avaient presque tous progressé dans les aspects du cours les plus traditionnels. Ils avaient aussi gagné en assurance, hésitaient moins à poser des questions, et essayaient d'être plus précis dans leurs argumentations, y compris en dehors des cours de mathématiques. Par exemple, pendant un cours de grammaire, où le professeur indiquait des règles, certains élèves lui ont demandé : Vous êtes sûr ? C'est toujours vrai ou il y a des cas où elle ne s'applique pas ?

Enfin, cette expérience a été l'occasion de faire passer un certain nombre d'idées utiles en mathématiques … et quelquefois ailleurs, parmi lesquelles :

- un problème peut avoir *une, des, ou pas* de solutions,
- *prouver* qu'il n'y a pas de solution n'est pas "négatif", c'est aussi une façon de résoudre un problème,
- si la solution cherchée se trouve parmi un grand nombre de possibilités, chaque fois que l'on peut *démontrer* que la solution doit *nécessairement* posséder une certaine propriété, on *réduit* le nombre de cas à étudier,
- si la solution doit *nécessairement* posséder deux propriétés *contradictoires*, alors *il n'y a pas* de

solution,

• dans certains cas, un problème peut être résolu plus facilement *en changeant de cadre*, par exemple en reformulant un problème géométrique sous forme arithmétique (ou l'inverse),

• la recherche de la solution d'un problème peut passer par la résolution d'autres problèmes, ou en suggérer d'autres,

• la méthode de résolution trouvée pour un problème donné peut éventuellement servir à en résoudre d'autres, proches mais différents,

• réfléchir et "faire des maths" permettent (dans certains cas) de gagner du temps. Par exemple en évitant de chercher une hypothétique solution ... qui n'existe pas!

• un problème, une fois résolu, peut suggérer des généralisations, ou de nouvelles questions. C'est ainsi que les maths « avancent » depuis plus de trois mille ans !

J.B.

Il existe une littérature abondante sur ce problème (ou des problèmes connexes).

Voici une liste de mots clés permettant d'interroger les moteurs de recherche avec votre moteur préféré.

Dominos pavage
Domino tiling (notamment sur Wikipedia, qui donne de nombreux liens)
Dimers math

Et quelques mathématiciens impliqués
Richard Kenyon
Temperley
Olivier Bodini
Kasteleyn
William Thurston
John Conway