

LA LOI BINOMIALE ET LES PROGRAMMES DE PREMIÈRE

Journées inter-académiques, Lyon
30 novembre 2010

Yves DUCCEL, IREM-Université de Franche-Comté

Avant-propos

Présentation

Yves Ducl :

- Enseignant-chercheur en mathématiques à l'Université de Franche-Comté.
- Animateur dans le groupe de travail "Probabilités et statistique" de l'IREM avec Bruno Sausseureau (Université de Franche-Comté) et Françoise Larnaudie (Lycée agricole, Dannemarie).
- Membre du groupe d'élaboration du document-ressources de Statistique et probabilités des programmes de Première, avec Philippe Dutarte, Robert Ferachoglou, Hélène Lample, Geneviève Loridon (responsable du groupe) et Bruno Sausseureau.

Remarques préliminaires

- L'exposé bénéficie de la réflexion au sein du groupe-IREM et du groupe "Document-ressources", mais il ne doit pas être considéré comme exprimant la position de ces groupes.
- Le parti pédagogique adopté n'engage que la responsabilité de l'auteur.
- Le propos vise à alimenter la réflexion sur l'application des programmes de Première, mais il ne prétend pas statuer sur ce qu'il faut faire dans cette classe.
- Le discours n'a pas été conçu comme une progression d'enseignement pour la classe.
- ♣ Quelques références en fin d'exposé.

- 1 La problématique par rapport à la Seconde
- 2 L'usage des modèles et des arbres
- 3 La découverte de la loi binomiale
- 4 Une approche de la prise de décision
 - Avec les outils de la Seconde
 - Avec la loi binomiale
- 5 Formalisation de la prise de décision avec la loi binomiale
- 6 Conclusion
- 7 Bibliographie

La problématique par rapport à la Seconde

Woburn : énoncé

- Une petite ville des États-Unis, Woburn, a connu 9 cas de leucémie parmi les 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979. La fréquence des leucémies pour cette tranche d'âge aux États-Unis est égale à 0,00052 (source : *Massachussetts Department of Public Health*). Les autorités concluent qu'il n'y a rien d'étrange dans cette ville. Qu'en pensez-vous ?
(Extrait de *Ressources Baccalauréat professionnel*, page 8)
- Le nombre de cas observés est-il **significatif** d'une situation anormale ou bien est-il simplement dû au hasard ?

Woburn : énoncé

- Une petite ville des États-Unis, Woburn, a connu 9 cas de leucémie parmi les 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979. La fréquence des leucémies pour cette tranche d'âge aux États-Unis est égale à 0,00052 (source : *Massachussetts Department of Public Health*). Les autorités concluent qu'il n'y a rien d'étrange dans cette ville. Qu'en pensez-vous ?
(Extrait de *Ressources Baccalauréat professionnel*, page 8)
- Le nombre de cas observés est-il **significatif** d'une situation anormale ou bien est-il simplement dû au hasard ?

Woburn : énoncé

- Une petite ville des États-Unis, Woburn, a connu 9 cas de leucémie parmi les 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979. La fréquence des leucémies pour cette tranche d'âge aux États-Unis est égale à 0,00052 (source : *Massachussetts Department of Public Health*). Les autorités concluent qu'il n'y a rien d'étrange dans cette ville. Qu'en pensez-vous ?
(Extrait de *Ressources Baccalauréat professionnel*, page 8)
- Le nombre de cas observés est-il **significatif** d'une situation anormale ou bien est-il simplement dû au hasard ?

Woburn : schéma d'urne

- Dans la suite, la population des États-Unis sera assimilée à une urne contenant 100 000 boules rouges ou vertes :
 - * les boules rouges, au nombre de 52, représentent les personnes atteintes de leucémie,
 - * les boules vertes représentent les personnes non atteintes.
- La population des 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979 à Woburn sera assimilée à l'observation d'un échantillon de 5969 boules, prélevées au hasard et avec remise dans l'urne.

Convention et notations

Soit un entier $n \geq 1$ et une expérience aléatoire $\mathcal{E}$:

- On notera $\mathcal{E}_n$ l'expérience aléatoire définie par le protocole suivant : *On effectue n épreuves successives de l'expérience $\mathcal{E}$ et on note, en respectant l'ordre, les issues de ces n épreuves successives.*
- On dira pour simplifier que $\mathcal{E}$ est l'expérience **de base** (ou **initiale** ou **de départ**), et que l'expérience $\mathcal{E}_n$ est obtenue par n "répétitions" à l'**identique** de l'expérience de départ $\mathcal{E}$.

Woburn : cadre probabiliste

- L'expérience aléatoire de départ, $\mathcal{E}$: "*Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur*", est une expérience de Bernoulli avec $p = 0,00052$.
- L'expérience étudiée est l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$ obtenue par 5969 "répétitions" à l'identique de $\mathcal{E}$.
- On associe à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}_{5969}$ un modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ et la variable aléatoire X qui, à toute issue ω de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$ fait correspondre $X(\omega) :=$ nombre de boules rouges comptées dans l'issue ω .

Woburn : cadre probabiliste

- L'expérience aléatoire de départ, $\mathcal{E}$: "*Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur*", est une expérience de Bernoulli avec $p = 0,00052$.
- L'expérience étudiée est l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$ obtenue par 5969 "répétitions" à l'identique de $\mathcal{E}$.
- On associe à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}_{5969}$ un modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ et la variable aléatoire X qui, à toute issue ω de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$ fait correspondre $X(\omega) :=$ nombre de boules rouges comptées dans l'issue ω .

Woburn : cadre probabiliste

- L'expérience aléatoire de départ, $\mathcal{E}$: "*Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur*", est une expérience de Bernoulli avec $p = 0,00052$.
- L'expérience étudiée est l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$ obtenue par 5969 "répétitions" à l'identique de $\mathcal{E}$.
- On associe à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}_{5969}$ un modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ et la variable aléatoire X qui, à toute issue ω de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$ fait correspondre $X(\omega) :=$ *nombre de boules rouges comptées dans l'issue ω* .

Woburn : Étude par simulation

- Observation d'une réalisation de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Déterminer la probabilité, $\mathbb{P}(X = 9)$, d'obtenir 9 boules rouges lorsqu'on effectue 5969 épreuves de l'expérience "*Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur*".
- Estimation par simulation informatique de $\mathbb{P}(X = 9)$ et décision par rapport à la question posée :

Simuler Woburn pour prise de décision

Woburn : Étude par simulation

- Observation d'une réalisation de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Déterminer la probabilité, $\mathbb{P}(X = 9)$, d'obtenir 9 boules rouges lorsqu'on effectue 5969 épreuves de l'expérience "*Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur*".
- Estimation par simulation informatique de $\mathbb{P}(X = 9)$ et décision par rapport à la question posée :

Simuler Woburn pour prise de décision

Woburn : Étude par simulation

- Observation d'une réalisation de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Déterminer la probabilité, $\mathbb{P}(X = 9)$, d'obtenir 9 boules rouges lorsqu'on effectue 5969 épreuves de l'expérience "*Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur*".
- Estimation par simulation informatique de $\mathbb{P}(X = 9)$ et décision par rapport à la question posée :

Simuler Woburn pour prise de décision

Woburn : Étude par simulation

- Observation d'une réalisation de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Déterminer la probabilité, $\mathbb{P}(X = 9)$, d'obtenir 9 boules rouges lorsqu'on effectue 5969 épreuves de l'expérience "*Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur*".
- Estimation par simulation informatique de $\mathbb{P}(X = 9)$ et décision par rapport à la question posée :

Simuler Woburn pour prise de décision

Commentaires

- Observer une issue de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$ revient à observer un échantillon de taille 5969.
- Il y a une **différence significative** entre la réalité observée et ce que l'on attendrait si la situation était normale : on décide que la situation est "anormale".
- Nous n'avons pas utilisé la méthode de prise de décision vue en Seconde,
- Nous avons utilisé une démarche intuitive dans la prise de décision.
- L'observation conduit à considérer que la situation présente une anomalie.

Critique

- La démarche utilisée n'est pas vraiment formalisée ni quantifiée.
- La probabilité est estimée, mais on ne connaît pas son expression mathématique exacte.
- Nous prenons une décision, mais nous ne connaissons pas le risque de nous tromper en la prenant.
- La méthode vue en Seconde permettrait d'évaluer ce risque d'erreur, mais elle n'est pas utilisée.
- Les conditions de validité de la méthode vue en Seconde ne sont pas réalisées, car p très petit.

Objectifs

Nous nous proposons maintenant de :

- Étudier le modèle probabiliste associé au schéma d'urne de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Préciser la connaissance mathématique de la loi de la variable X introduite.
- Formaliser une méthode de prise de décision :
 - * sur la base de la démarche initiée en Seconde,
 - * valable sans restriction pour tout réel $0 < p < 1$, tout entier $n \geq 1$,
 - * qui permette de retrouver et justifier mathématiquement *a posteriori* les résultats vus en Seconde.

Objectifs

Nous nous proposons maintenant de :

- Étudier le modèle probabiliste associé au schéma d'urne de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Préciser la connaissance mathématique de la loi de la variable X introduite.
- Formaliser une méthode de prise de décision :
 - * sur la base de la démarche initiée en Seconde,
 - * valable sans restriction pour tout réel $0 < p < 1$, tout entier $n \geq 1$,
 - * qui permette de retrouver et justifier mathématiquement *a posteriori* les résultats vus en Seconde.

Objectifs

Nous nous proposons maintenant de :

- Étudier le modèle probabiliste associé au schéma d'urne de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Préciser la connaissance mathématique de la loi de la variable X introduite.
- Formaliser une méthode de prise de décision :
 - * sur la base de la démarche initiée en Seconde,
 - * valable sans restriction pour tout réel $0 < p < 1$, tout entier $n \geq 1$.
 - * qui permette de retrouver et justifier mathématiquement *a posteriori* les résultats vus en Seconde.

Objectifs

Nous nous proposons maintenant de :

- Étudier le modèle probabiliste associé au schéma d'urne de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Préciser la connaissance mathématique de la loi de la variable X introduite.
- Formaliser une méthode de prise de décision :
 - * sur la base de la démarche initiée en Seconde,
 - * valable sans restriction pour tout réel $0 < p < 1$, tout entier $n \geq 1$.
 - * qui permette de retrouver et justifier mathématiquement *a posteriori* les résultats vus en Seconde.

Objectifs

Nous nous proposons maintenant de :

- Étudier le modèle probabiliste associé au schéma d'urne de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Préciser la connaissance mathématique de la loi de la variable X introduite.
- Formaliser une méthode de prise de décision :
 - * sur la base de la démarche initiée en Seconde,
 - * valable sans restriction pour tout réel $0 < p < 1$, tout entier $n \geq 1$.
 - * qui permette de retrouver et justifier mathématiquement *a posteriori* les résultats vus en Seconde.

Objectifs

Nous nous proposons maintenant de :

- Étudier le modèle probabiliste associé au schéma d'urne de l'expérience $\mathcal{E}_{5969}$.
- Préciser la connaissance mathématique de la loi de la variable X introduite.
- Formaliser une méthode de prise de décision :
 - * sur la base de la démarche initiée en Seconde,
 - * valable sans restriction pour tout réel $0 < p < 1$, tout entier $n \geq 1$.
 - * qui permette de retrouver et justifier mathématiquement *a posteriori* les résultats vus en Seconde.

L'usage des modèles et des arbres

Protocole $\mathcal{E}$

- Pour simplifier le raisonnement, considérons l'expérience de base $\mathcal{E}$ suivante :

Soit une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules rouges, indistinguables au toucher mais identifiables à la vue (boules numérotées par exemple). On extrait une boule de l'urne et on note sa couleur.

- Nous allons étudier deux modèles associés à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}_3$ qui consiste à répéter trois fois à l'identique l'expérience de base.

Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ de $\mathcal{E}_3$

■ Choix du modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$: Quel Ω ? Quel $\mathbb{P}$?

■ Quel Ω ? Identifier toutes les issues possibles

- * On prend pour univers des possibles l'ensemble des triplets formés avec les deux couleurs r ou v :

$$\Omega := \{rrr, rrv, rvr, rvv, vrr, vrv, vvr, vvv\}.$$

■ Choix de la probabilité $\mathbb{P}$?

- * L'équiprobabilité ne convient pas : principe de raison insuffisant en défaut.
- * Intérêt de passer par un modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ pour décrire $\mathcal{E}_3$.

Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ de $\mathcal{E}_3$

- Choix du modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$: Quel Ω ? Quel $\mathbb{P}$?
- Quel Ω ? Identifier toutes les issues possibles
 - * On prend pour univers des possibles l'ensemble des triplets formés avec les deux couleurs r ou v :
 $\Omega := \{rrr, rrv, rvr, rvv, vrr, vrv, vvr, vvv\}.$
- Choix de la probabilité $\mathbb{P}$?
 - * L'équiprobabilité ne convient pas : principe de raison insuffisant en défaut.
 - * Intérêt de passer par un modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ pour décrire $\mathcal{E}_3$.

Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ de $\mathcal{E}_3$

- Choix du modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$: Quel Ω ? Quel $\mathbb{P}$?
- Quel Ω ? Identifier toutes les issues possibles
 - * On prend pour univers des possibles l'ensemble des triplets formés avec les deux couleurs r ou v :
 $\Omega := \{rrr, rrv, rvr, rvv, vrr, vrv, vvr, vvv\}.$
- Choix de la probabilité $\mathbb{P}$?
 - * L'équiprobabilité ne convient pas : principe de raison insuffisante en défaut.
 - * Intérêt de passer par un modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ pour décrire $\mathcal{E}_3$.

Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ de $\mathcal{E}_3$

- Choix du modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$: Quel Ω ? Quel $\mathbb{P}$?
- Quel Ω ? Identifier toutes les issues possibles
 - * On prend pour univers des possibles l'ensemble des triplets formés avec les deux couleurs r ou v :
 $\Omega := \{rrr, rrv, rvr, rvv, vrr, vrv, vvr, vvv\}.$
- Choix de la probabilité $\mathbb{P}$?
 - * L'équiprobabilité ne convient pas : principe de raison insuffisant en défaut.
 - * Intérêt de passer par un modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ pour décrire $\mathcal{E}_3$.

Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ de $\mathcal{E}_3$

- Choix du modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$: Quel Ω ? Quel $\mathbb{P}$?
- Quel Ω ? Identifier toutes les issues possibles
 - * On prend pour univers des possibles l'ensemble des triplets formés avec les deux couleurs r ou v :
 $\Omega := \{rrr, rrv, rvr, rvv, vrr, vr v, vvr, vvv\}.$
- Choix de la probabilité $\mathbb{P}$?
 - * L'équiprobabilité ne convient pas : principe de raison insuffisante en défaut.
 - * Intérêt de passer par un modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ pour décrire $\mathcal{E}_3$.

Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ de $\mathcal{E}_3$

- Choix du modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$: Quel Ω ? Quel $\mathbb{P}$?
- Quel Ω ? Identifier toutes les issues possibles
 - * On prend pour univers des possibles l'ensemble des triplets formés avec les deux couleurs r ou v :
 $\Omega := \{rrr, rrv, rvr, rvv, vrr, vr v, vvr, vvv\}.$
- Choix de la probabilité $\mathbb{P}$?
 - * L'équiprobabilité ne convient pas : principe de raison insuffisant en défaut.
 - * Intérêt de passer par un modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ pour décrire $\mathcal{E}_3$.

Le modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ de $\mathcal{E}_3$

On choisit le modèle probabiliste $(\Omega', \mathbb{P}')$ de façon à prendre en compte la boule elle-même, et pas seulement sa couleur (on peut imaginer que les boules sont numérotées et qu'on note sa couleur et son numéro).

■ Quel Ω' ? Identifier toutes les issues possibles

- * Ω' est l'ensemble des triplets de boules. Il y a 125 issues possibles.

■ Choix de la probabilité $\mathbb{P}'$?

- * Comme les expériences sont répétées à l'identique, on peut considérer l'équiprobabilité des issues.
- * On prend pour $\mathbb{P}'$ l'équiprobabilité sur Ω' .

♣ Remarque sur les arbres pondérés : Justifier la pondération de l'arbre

Le modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ de $\mathcal{E}_3$

On choisit le modèle probabiliste $(\Omega', \mathbb{P}')$ de façon à prendre en compte la boule elle-même, et pas seulement sa couleur (on peut imaginer que les boules sont numérotées et qu'on note sa couleur et son numéro).

■ Quel Ω' ? Identifier toutes les issues possibles

- * Ω' est l'ensemble des triplets de boules. Il y a 125 issues possibles.

■ Choix de la probabilité $\mathbb{P}'$?

- * Comme les expériences sont répétées à l'identique, on peut considérer l'équiprobabilité des issues.
- * On prend pour $\mathbb{P}'$ l'équiprobabilité sur Ω' .

♣ Remarque sur les arbres pondérés : Justifier la pondération de l'arbre

Le modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ de $\mathcal{E}_3$

On choisit le modèle probabiliste $(\Omega', \mathbb{P}')$ de façon à prendre en compte la boule elle-même, et pas seulement sa couleur (on peut imaginer que les boules sont numérotées et qu'on note sa couleur et son numéro).

■ Quel Ω' ? Identifier toutes les issues possibles

- * Ω' est l'ensemble des triplets de boules. Il y a 125 issues possibles.

■ Choix de la probabilité $\mathbb{P}'$?

- * Comme les expériences sont répétées à l'identique, on peut considérer l'équiprobabilité des issues.
- * On prend pour $\mathbb{P}'$ l'équiprobabilité sur Ω' .

♣ Remarque sur les arbres pondérés : Justifier la pondération de l'arbre

Le modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ de $\mathcal{E}_3$

On choisit le modèle probabiliste $(\Omega', \mathbb{P}')$ de façon à prendre en compte la boule elle-même, et pas seulement sa couleur (on peut imaginer que les boules sont numérotées et qu'on note sa couleur et son numéro).

■ Quel Ω' ? Identifier toutes les issues possibles

- * Ω' est l'ensemble des triplets de boules. Il y a 125 issues possibles.

■ Choix de la probabilité $\mathbb{P}'$?

- * Comme les expériences sont répétées à l'identique, on peut considérer l'équiprobabilité des issues.
- * On prend pour $\mathbb{P}'$ l'équiprobabilité sur Ω' .

♣ Remarque sur les arbres pondérés : Justifier la pondération de l'arbre

Le modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ de $\mathcal{E}_3$

On choisit le modèle probabiliste $(\Omega', \mathbb{P}')$ de façon à prendre en compte la boule elle-même, et pas seulement sa couleur (on peut imaginer que les boules sont numérotées et qu'on note sa couleur et son numéro).

■ Quel Ω' ? Identifier toutes les issues possibles

- * Ω' est l'ensemble des triplets de boules. Il y a 125 issues possibles.

■ Choix de la probabilité $\mathbb{P}'$?

- * Comme les expériences sont répétées à l'identique, on peut considérer l'équiprobabilité des issues.
- * On prend pour $\mathbb{P}'$ l'équiprobabilité sur Ω' .

♣ Remarque sur les arbres pondérés : Justifier la pondération de l'arbre

Le modèle intermédiaire $(\Omega', \mathbb{P}')$ de $\mathcal{E}_3$

On choisit le modèle probabiliste $(\Omega', \mathbb{P}')$ de façon à prendre en compte la boule elle-même, et pas seulement sa couleur (on peut imaginer que les boules sont numérotées et qu'on note sa couleur et son numéro).

■ Quel Ω' ? Identifier toutes les issues possibles

- * Ω' est l'ensemble des triplets de boules. Il y a 125 issues possibles.

■ Choix de la probabilité $\mathbb{P}'$?

- * Comme les expériences sont répétées à l'identique, on peut considérer l'équiprobabilité des issues.
- * On prend pour $\mathbb{P}'$ l'équiprobabilité sur Ω' .

♣ Remarque sur les arbres pondérés : Justifier la pondération de l'arbre

Remarques sur les modèles associés à $\mathcal{E}_3$

- Tous les événements de $(\Omega, \mathbb{P})$ peuvent être modélisés avec $(\Omega', \mathbb{P}')$. Mais la réciproque est fausse.
- Le modèle $(\Omega', \mathbb{P}')$ est plus riche en événements que le modèle $(\Omega, \mathbb{P})$.
- Les événements élémentaires pour $(\Omega, \mathbb{P})$ ne sont pas modélisés par des événements élémentaires pour $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- On prend pour probabilité d'un événement élémentaire de $(\Omega, \mathbb{P})$, la probabilité de l'événement correspondant modélisé avec $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- Le modèle intermédiaire d'équiprobabilité $(\Omega', \mathbb{P}')$ nous permet de justifier la règle du produit des probabilités le long d'une branche de l'arbre pondéré associé à $(\Omega, \mathbb{P})$.

Remarques sur les modèles associés à $\mathcal{E}_3$

- Tous les événements de $(\Omega, \mathbb{P})$ peuvent être modélisés avec $(\Omega', \mathbb{P}')$. Mais la réciproque est fausse.
- Le modèle $(\Omega', \mathbb{P}')$ est plus riche en événements que le modèle $(\Omega, \mathbb{P})$.
- Les événements élémentaires pour $(\Omega, \mathbb{P})$ ne sont pas modélisés par des événements élémentaires pour $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- On prend pour probabilité d'un événement élémentaire de $(\Omega, \mathbb{P})$, la probabilité de l'événement correspondant modélisé avec $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- Le modèle intermédiaire d'équiprobabilité $(\Omega', \mathbb{P}')$ nous permet de justifier la règle du produit des probabilités le long d'une branche de l'arbre pondéré associé à $(\Omega, \mathbb{P})$.

Remarques sur les modèles associés à $\mathcal{E}_3$

- Tous les événements de $(\Omega, \mathbb{P})$ peuvent être modélisés avec $(\Omega', \mathbb{P}')$. Mais la réciproque est fausse.
- Le modèle $(\Omega', \mathbb{P}')$ est plus riche en événements que le modèle $(\Omega, \mathbb{P})$.
- Les événements élémentaires pour $(\Omega, \mathbb{P})$ ne sont pas modélisés par des événements élémentaires pour $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- On prend pour probabilité d'un événement élémentaire de $(\Omega, \mathbb{P})$, la probabilité de l'événement correspondant modélisé avec $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- Le modèle intermédiaire d'équiprobabilité $(\Omega', \mathbb{P}')$ nous permet de justifier la règle du produit des probabilités le long d'une branche de l'arbre pondéré associé à $(\Omega, \mathbb{P})$.

Remarques sur les modèles associés à $\mathcal{E}_3$

- Tous les événements de $(\Omega, \mathbb{P})$ peuvent être modélisés avec $(\Omega', \mathbb{P}')$. Mais la réciproque est fausse.
- Le modèle $(\Omega', \mathbb{P}')$ est plus riche en événements que le modèle $(\Omega, \mathbb{P})$.
- Les événements élémentaires pour $(\Omega, \mathbb{P})$ ne sont pas modélisés par des événements élémentaires pour $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- On prend pour probabilité d'un événement élémentaire de $(\Omega, \mathbb{P})$, la probabilité de l'événement correspondant modélisé avec $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- Le modèle intermédiaire d'équiprobabilité $(\Omega', \mathbb{P}')$ nous permet de justifier la règle du produit des probabilités le long d'une branche de l'arbre pondéré associé à $(\Omega, \mathbb{P})$.

Remarques sur les modèles associés à $\mathcal{E}_3$

- Tous les événements de $(\Omega, \mathbb{P})$ peuvent être modélisés avec $(\Omega', \mathbb{P}')$. Mais la réciproque est fausse.
- Le modèle $(\Omega', \mathbb{P}')$ est plus riche en événements que le modèle $(\Omega, \mathbb{P})$.
- Les événements élémentaires pour $(\Omega, \mathbb{P})$ ne sont pas modélisés par des événements élémentaires pour $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- On prend pour probabilité d'un événement élémentaire de $(\Omega, \mathbb{P})$, la probabilité de l'événement correspondant modélisé avec $(\Omega', \mathbb{P}')$.
- Le modèle intermédiaire d'équiprobabilité $(\Omega', \mathbb{P}')$ nous permet de justifier la règle du produit des probabilités le long d'une branche de l'arbre pondéré associé à $(\Omega, \mathbb{P})$.

Conclusion sur $(\Omega, \mathbb{P})$

Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ retenu pour décrire l'expérience à trois répétitions $\mathcal{E}_3$ peut être résumé par le tableau :

ω	rrr	rrv	rvr	rvv	vrr	vrv	vvr	vvv
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$\frac{8}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{18}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{18}{125}$	$\frac{18}{125}$	$\frac{27}{125}$

Généralisation à n répétitions et paramètre p

- Expérience de départ $\mathcal{E}$ de paramètre p . Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ se généralise au cas de l'expérience à n répétitions $\mathcal{E}_n$:
 - * Ω est l'ensemble des n -uplets formés avec les deux couleurs r et v .
 - * $\mathbb{P}$ est définie par ses valeurs pour chacun des événements élémentaires : la probabilité d'obtenir une issue contenant exactement k fois la couleur r est égale à $p^k q^{n-k}$, où $q := 1 - p$.
- Le nombre d'issues contenant exactement k fois la couleur r est égal au nombre de branches de l'arbre pondéré contenant exactement k boules rouges.
- ♣ Notation : On notera $\binom{n}{k}$ ce nombre.

Généralisation à n répétitions et paramètre p

- Expérience de départ $\mathcal{E}$ de paramètre p . Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ se généralise au cas de l'expérience à n répétitions $\mathcal{E}_n$:
 - * Ω est l'ensemble des n -uplets formés avec les deux couleurs r et v .
 - * $\mathbb{P}$ est définie par ses valeurs pour chacun des événements élémentaires : la probabilité d'obtenir une issue contenant exactement k fois la couleur r est égale à $p^k q^{n-k}$, où $q := 1 - p$.
- Le nombre d'issues contenant exactement k fois la couleur r est égal au nombre de branches de l'arbre pondéré contenant exactement k boules rouges.
- ♣ Notation : On notera $\binom{n}{k}$ ce nombre.

Généralisation à n répétitions et paramètre p

- Expérience de départ $\mathcal{E}$ de paramètre p . Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ se généralise au cas de l'expérience à n répétitions $\mathcal{E}_n$:
 - * Ω est l'ensemble des n -uplets formés avec les deux couleurs r et v .
 - * $\mathbb{P}$ est définie par ses valeurs pour chacun des événements élémentaires : la probabilité d'obtenir une issue contenant exactement k fois la couleur r est égale à $p^k q^{n-k}$, où $q := 1 - p$.
- Le nombre d'issues contenant exactement k fois la couleur r est égal au nombre de branches de l'arbre pondéré contenant exactement k boules rouges.
- ♣ Notation : On notera $\binom{n}{k}$ ce nombre.

Généralisation à n répétitions et paramètre p

- Expérience de départ $\mathcal{E}$ de paramètre p . Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ se généralise au cas de l'expérience à n répétitions $\mathcal{E}_n$:
 - * Ω est l'ensemble des n -uplets formés avec les deux couleurs r et v .
 - * $\mathbb{P}$ est définie par ses valeurs pour chacun des événements élémentaires : la probabilité d'obtenir une issue contenant exactement k fois la couleur r est égale à $p^k q^{n-k}$, où $q := 1 - p$.
- Le nombre d'issues contenant exactement k fois la couleur r est égal au nombre de branches de l'arbre pondéré contenant exactement k boules rouges.

♣ Notation : On notera $\binom{n}{k}$ ce nombre.

Généralisation à n répétitions et paramètre p

- Expérience de départ $\mathcal{E}$ de paramètre p . Le modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ se généralise au cas de l'expérience à n répétitions $\mathcal{E}_n$:
 - * Ω est l'ensemble des n -uplets formés avec les deux couleurs r et v .
 - * $\mathbb{P}$ est définie par ses valeurs pour chacun des événements élémentaires : la probabilité d'obtenir une issue contenant exactement k fois la couleur r est égale à $p^k q^{n-k}$, où $q := 1 - p$.
- Le nombre d'issues contenant exactement k fois la couleur r est égal au nombre de branches de l'arbre pondéré contenant exactement k boules rouges.
- ♣ Notation : On notera $\binom{n}{k}$ ce nombre.

Variables aléatoires

Exemples de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$:

- La variable X **binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 2/5$** :

$$\omega \in \Omega \mapsto X(\omega) = \text{nombre de boules rouges dans l'issue } \omega.$$

- La variable Y **géométrique tronquée de paramètres $n = 3$ et $p = 2/5$** :

$$\omega \in \Omega \mapsto Y(\omega) = \text{rang de la première boule rouge dans l'issue } \omega.$$

Variables aléatoires

Exemples de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$:

- La variable X **binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 2/5$** :

$\omega \in \Omega \mapsto X(\omega) =$ nombre de boules rouges dans l'issue ω .

- La variable Y **géométrique tronquée de paramètres $n = 3$ et $p = 2/5$** :

$\omega \in \Omega \mapsto Y(\omega) =$ rang de la première boule rouge dans l'issue ω .

La découverte de la loi binomiale

Loi de la variable X

- La variable binomiale X prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$.
- Loi de la v.a. X : Déterminer la loi
- La loi de X peut être résumée par le tableau :

x	0	1	2	3
$\{X = x\}$	$\{vvv\}$	$\{rvv, vrv, vvr\}$	$\{rrv, vrr, rvr\}$	$\{rrr\}$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3$	$3 \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2$	$3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3$

Loi de la variable X

- La variable binomiale X prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$.
- Loi de la v.a. X : Déterminer la loi
- La loi de X peut être résumée par le tableau :

x	0	1	2	3
$\{X = x\}$	$\{vvv\}$	$\{rvv, vrv, vvr\}$	$\{rrv, vrr, rvr\}$	$\{rrr\}$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3$	$3 \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2$	$3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3$

Loi de la variable X

- La variable binomiale X prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$.
- Loi de la v.a. X : Déterminer la loi
- La loi de X peut être résumée par le tableau :

x	0	1	2	3
$\{X = x\}$	$\{vvv\}$	$\{rvv, vrv, vvr\}$	$\{rrv, vrr, rvr\}$	$\{rrr\}$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3$	$3 \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2$	$3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3$

Généralisation à n répétitions et paramètre p

Expérience de départ $\mathcal{E}$ de paramètre p avec n répétitions.

- La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$.
- La loi de la variable aléatoire est donnée, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$, par la relation :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

- Activité "Woburn" : l'expression de la probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X = 9) = \binom{5969}{9} \times 0,00052^9 \times 0,99948^{5960}$. Valeur ?

Généralisation à n répétitions et paramètre p

Expérience de départ $\mathcal{E}$ de paramètre p avec n répétitions.

- La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$.
- La loi de la variable aléatoire est donnée, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$, par la relation :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

- Activité "Woburn" : l'expression de la probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(X = 9) = \binom{5969}{9} \times 0,00052^9 \times 0,99948^{5960}. \text{ Valeur ?}$$

Généralisation à n répétitions et paramètre p

Expérience de départ $\mathcal{E}$ de paramètre p avec n répétitions.

- La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$.
- La loi de la variable aléatoire est donnée, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$, par la relation :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

- Activité "Woburn" : l'expression de la probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X = 9) = \binom{5969}{9} \times 0,00052^9 \times 0,99948^{5960}$. Valeur ?

Propriétés et détermination des $\binom{n}{k}$

Quelques relations sur les $\binom{n}{k}$



$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

- Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- La relation de Pascal Justifier la relation : pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Quelques relations sur les $\binom{n}{k}$



$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

- Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- La relation de Pascal : pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Quelques relations sur les $\binom{n}{k}$



$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

- Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- La relation de Pascal Justifier la relation : pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Le triangle arithmétique

Conséquence : le **triangle arithmétique** donne un algorithme de calcul des $\binom{n}{k}$:

- Le triangle arithmétique pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$n = 1$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 2$	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
$n = 3$	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
$n = 4$	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	0	0	0

- Histoire : Les triangles arithmétiques de Al-Karaji (Xe siècle) et de Pascal (XVIIe siècle) : [Voir les triangles](#)

Le triangle arithmétique

Conséquence : le **triangle arithmétique** donne un algorithme de calcul des $\binom{n}{k}$:

- Le triangle arithmétique pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$n = 1$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 2$	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
$n = 3$	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
$n = 4$	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	0	0	0

- Histoire : Les triangles arithmétiques de Al-Karaji (Xe siècle) et de Pascal (XVIIe siècle) : [Voir les triangles](#)

Moments d'une variable binomiale

Espérance de la variable X , $n = 1, 2, 3, 4$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{k=n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } p + q = 1.$$

- Cas $n = 1$: $\mathbb{E}(X) = 0q + 1p = p$.
- Cas $n = 2$: $\mathbb{E}(X) = 2pq + 2p^2 = 2p(p + q) = 2p$.
- Cas $n = 3$: $\mathbb{E}(X) = 3pq^2 + 2 \cdot 3p^2q + 3p^3 = 3p(q^2 + 2pq + p^2) = 3p(p + q)^2 = 3p$.
- Cas $n = 4$: $\mathbb{E}(X) = 4pq^3 + 2 \cdot 6p^2q^2 + 3 \cdot 4p^3q + 4p^4 = 4p(q^3 + 3p^2q + 3pq^2 + p^3) = 4p(p + q)^3 = 4p$.

Espérance de la variable X , $n = 1, 2, 3, 4$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{k=n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } p + q = 1.$$

- Cas $n = 1$: $\mathbb{E}(X) = 0q + 1p = p.$
- Cas $n = 2$: $\mathbb{E}(X) = 2pq + 2p^2 = 2p(p + q) = 2p.$
- Cas $n = 3$: $\mathbb{E}(X) = 3pq^2 + 2 \cdot 3p^2q + 3p^3 =$
 $3p(q^2 + 2pq + p^2) = 3p(p + q)^2 = 3p.$
- Cas $n = 4$: $\mathbb{E}(X) = 4pq^3 + 2 \cdot 6p^2q^2 + 3 \cdot 4p^3q + 4p^4 =$
 $4p(q^3 + 3p^2q + 3pq^2 + p^3) = 4p(p + q)^3 = 4p.$

Espérance de la variable X , $n = 1, 2, 3, 4$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{k=n} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } p + q = 1.$$

- Cas $n = 1$: $\mathbb{E}(X) = 0q + 1p = p.$
- Cas $n = 2$: $\mathbb{E}(X) = 2pq + 2p^2 = 2p(p + q) = 2p.$
- Cas $n = 3$: $\mathbb{E}(X) = 3pq^2 + 2 \cdot 3p^2q + 3p^3 =$
 $3p(q^2 + 2pq + p^2) = 3p(p + q)^2 = 3p.$
- Cas $n = 4$: $\mathbb{E}(X) = 4pq^3 + 2 \cdot 6p^2q^2 + 3 \cdot 4p^3q + 4p^4 =$
 $4p(q^3 + 3p^2q + 3pq^2 + p^3) = 4p(p + q)^3 = 4p.$

Espérance de la variable X , $n = 1, 2, 3, 4$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{k=n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } p + q = 1.$$

- Cas $n = 1$: $\mathbb{E}(X) = 0q + 1p = p.$
- Cas $n = 2$: $\mathbb{E}(X) = 2pq + 2p^2 = 2p(p + q) = 2p.$
- Cas $n = 3$: $\mathbb{E}(X) = 3pq^2 + 2 \cdot 3p^2q + 3p^3 =$
 $3p(q^2 + 2pq + p^2) = 3p(p + q)^2 = 3p.$
- Cas $n = 4$: $\mathbb{E}(X) = 4pq^3 + 2 \cdot 6p^2q^2 + 3 \cdot 4p^3q + 4p^4 =$
 $4p(q^3 + 3p^2q + 3pq^2 + p^3) = 4p(p + q)^3 = 4p.$

Moments d'une variable binomiale : cas général

- Généralisation à n quelconque : $\mathbb{E}(X) = np$.
- La variance de X est $\sigma_X^2 = npq$ (admis).
- ♣ Au passage ... : Relation entre le triangle arithmétique et les identités remarquables (**Binôme de Newton**) :

$$\binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \dots + \binom{n}{n} p^n = (p+q)^n .$$

- ♣ Vocabulaire : Dans la suite de l'exposé, on parlera de "**grande binomiale**" si $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, et dans le cas contraire de "**petite binomiale**".

Moments d'une variable binomiale : cas général

- Généralisation à n quelconque : $\mathbb{E}(X) = np$.
- La variance de X est $\sigma_X^2 = npq$ (admis).
- ♣ Au passage ... : Relation entre le triangle arithmétique et les identités remarquables (**Binôme de Newton**) :

$$\binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \dots + \binom{n}{n} p^n = (p+q)^n .$$

- ♣ Vocabulaire : Dans la suite de l'exposé, on parlera de "**grande binomiale**" si $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, et dans le cas contraire de "**petite binomiale**".

Moments d'une variable binomiale : cas général

- Généralisation à n quelconque : $\mathbb{E}(X) = np$.
- La variance de X est $\sigma_X^2 = npq$ (admis).
- ♣ Au passage ... : Relation entre le triangle arithmétique et les identités remarquables (**Binôme de Newton**) :

$$\binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \dots + \binom{n}{n} p^n = (p+q)^n .$$

- ♣ Vocabulaire : Dans la suite de l'exposé, on parlera de "**grande binomiale**" si $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, et dans le cas contraire de "**petite binomiale**".

Moments d'une variable binomiale : cas général

- Généralisation à n quelconque : $\mathbb{E}(X) = np$.
- La variance de X est $\sigma_X^2 = npq$ (admis).
- ♣ Au passage ... : Relation entre le triangle arithmétique et les identités remarquables (**Binôme de Newton**) :

$$\binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \dots + \binom{n}{n} p^n = (p+q)^n .$$

- ♣ Vocabulaire : Dans la suite de l'exposé, on parlera de "**grande binomiale**" si $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, et dans le cas contraire de "**petite binomiale**".

Loi binomiale et tableur

- Calculs et représentations graphiques : utilisation de la fonction LOI.BINOMIALE des tableurs.
- Application à l'activité "Woburn" : $\mathbb{P}(X = 9) \simeq 0,0033$.

[Voir diagramme Woburn](#)

- Influence des paramètres n et p sur : l'allure (symétrie?) et la position du diagramme en bâtons, la dispersion de X .

[Voir grandes binomiales avec tableur](#)

[Voir petites binomiales avec tableur](#)

- ♣ Allure symétrique "en cloche" centrée sur np des grandes binomiales .
- ♣ Déplacement vers la droite du diagramme à n fixé en fonction de la croissance de p .
- ♣ Dispersion maximale en $p = 0,5$ (variation de $p \in [0,1] \mapsto np(1-p)$).

Loi binomiale et tableur

- Calculs et représentations graphiques : utilisation de la fonction LOI.BINOMIALE des tableurs.
- Application à l'activité "Woburn" : $\mathbb{P}(X = 9) \simeq 0,0033$.

Voir diagramme Woburn

- Influence des paramètres n et p sur : l'allure (symétrie ?) et la position du diagramme en bâtons, la dispersion de X .

Voir grandes binomiales avec tableur

Voir petites binomiales avec tableur

- ♣ Allure symétrique "en cloche" centrée sur np des grandes binomiales .
- ♣ Déplacement vers la droite du diagramme à n fixé en fonction de la croissance de p .
- ♣ Dispersion maximale en $p = 0,5$ (variation de $p \in [0, 1] \mapsto np(1 - p)$).

Loi binomiale et tableur

- Calculs et représentations graphiques : utilisation de la fonction LOI.BINOMIALE des tableurs.
- Application à l'activité "Woburn" : $\mathbb{P}(X = 9) \simeq 0,0033$.

Voir diagramme Woburn

- Influence des paramètres n et p sur : l'allure (symétrie?) et la position du diagramme en bâtons, la dispersion de X .

Voir grandes binomiales avec tableur

Voir petites binomiales avec tableur

- ♣ Allure symétrique "en cloche" centrée sur np des grandes binomiales .
- ♣ Déplacement vers la droite du diagramme à n fixé en fonction de la croissance de p .
- ♣ Dispersion maximale en $p = 0,5$ (variation de $p \in [0, 1] \mapsto np(1 - p)$).

Loi binomiale et tableur

- Calculs et représentations graphiques : utilisation de la fonction LOI.BINOMIALE des tableurs.
- Application à l'activité "Woburn" : $\mathbb{P}(X = 9) \simeq 0,0033$.

Voir diagramme Woburn

- Influence des paramètres n et p sur : l'allure (symétrie?) et la position du diagramme en bâtons, la dispersion de X .

Voir grandes binomiales avec tableur

Voir petites binomiales avec tableur

- ♣ Allure symétrique "en cloche" centrée sur np des grandes binomiales .
- ♣ Déplacement vers la droite du diagramme à n fixé en fonction de la croissance de p .
- ♣ Dispersion maximale en $p = 0,5$ (variation de $p \in [0,1] \mapsto np(1-p)$).

Loi binomiale et tableur

- Calculs et représentations graphiques : utilisation de la fonction LOI.BINOMIALE des tableurs.
- Application à l'activité "Woburn" : $\mathbb{P}(X = 9) \simeq 0,0033$.

Voir diagramme Woburn

- Influence des paramètres n et p sur : l'allure (symétrie?) et la position du diagramme en bâtons, la dispersion de X .

Voir grandes binomiales avec tableur

Voir petites binomiales avec tableur

- ♣ Allure symétrique "en cloche" centrée sur np des grandes binomiales .
- ♣ Déplacement vers la droite du diagramme à n fixé en fonction de la croissance de p .
- ♣ Dispersion maximale en $p = 0,5$ (variation de $p \in [0,1] \mapsto np(1-p)$).

Loi binomiale et tableur

- Calculs et représentations graphiques : utilisation de la fonction LOI.BINOMIALE des tableurs.
- Application à l'activité "Woburn" : $\mathbb{P}(X = 9) \simeq 0,0033$.

Voir diagramme Woburn

- Influence des paramètres n et p sur : l'allure (symétrie?) et la position du diagramme en bâtons, la dispersion de X .

Voir grandes binomiales avec tableur

Voir petites binomiales avec tableur

- ♣ Allure symétrique "en cloche" centrée sur np des grandes binomiales .
- ♣ Déplacement vers la droite du diagramme à n fixé en fonction de la croissance de p .
- ♣ Dispersion maximale en $p = 0,5$ (variation de $p \in [0, 1] \mapsto np(1 - p)$).

Une approche de la prise de décision

Avec les outils de la Seconde

Intervalle de fluctuation introduit en Seconde : IF-Seconde

- Si $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, la probabilité, que la fréquence empirique F de succès dans un échantillon de taille n soit dans $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, est supérieure à 0,95 (seuil de l'intervalle).
- $\mathbb{P} \left(F \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) \geq 0,95.$
- ♣ L'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ sera noté **IF-Seconde** dans la suite de l'exposé.

La démarche de prise de décision en Seconde

- On s'intéresse à une expérience de Bernoulli de paramètre inconnu p et on veut décider si $p = p_0$ où p_0 valeur de référence donnée.
- Démarche de la prise de décision :
 - * *On observe un échantillon de taille n et on calcule la fréquence observée f ,*
 - * *Si $f \notin \left[p_0 - \frac{1}{\sqrt{n}}, p_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, on décide que $p \neq p_0$,*
 - * *Si $f \in \left[p_0 - \frac{1}{\sqrt{n}}, p_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, on décide que $p = p_0$.*
- ♣ On a (au plus) 5% de chances de se tromper quand on décide que $p \neq p_0$.

Un exemple : La pièce de Buffon (1777)

- Expérience relatée dans *Essai d'Arithmétique morale* (1777) : Buffon lance 4040 fois une pièce et il obtient 2049 fois "Pile". La pièce est-elle équilibrée ?
- La v.a. $X = \text{"Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers"}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*" (i.e. $p = p_0 = 0,5$).
- Les conditions de validité de l'utilisation de l'IF-Seconde sont vérifiées : $n = 5969 > 25$ et $0,2 < p_0 = 0,5 < 0,8$.
- Diagramme en bâtons de la loi de la v.a. X sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$: [Voir le diagramme en bâtons](#)
- Visualisation de la règle de décision avec l'IF-Seconde et réflexion sur la notion d'IF : [Voir la règle](#)

Un exemple : La pièce de Buffon (1777)

- Expérience relatée dans *Essai d'Arithmétique morale* (1777) : Buffon lance 4040 fois une pièce et il obtient 2049 fois "Pile". La pièce est-elle équilibrée ?
- La v.a. $X = \text{"Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers"}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040 ; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*" (i.e. $p = p_0 = 0,5$).
- Les conditions de validité de l'utilisation de l'IF-Seconde sont vérifiées : $n = 5969 > 25$ et $0,2 < p_0 = 0,5 < 0,8$.
- Diagramme en bâtons de la loi de la v.a. X sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$: [Voir le diagramme en bâtons](#)
- Visualisation de la règle de décision avec l'IF-Seconde et réflexion sur la notion d'IF : [Voir la règle](#)

Un exemple : La pièce de Buffon (1777)

- Expérience relatée dans *Essai d'Arithmétique morale* (1777) : Buffon lance 4040 fois une pièce et il obtient 2049 fois "Pile". La pièce est-elle équilibrée ?
- La v.a. $X = \text{"Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers"}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040 ; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*" (i.e. $p = p_0 = 0,5$).
- Les conditions de validité de l'utilisation de l'IF-Seconde sont vérifiées : $n = 5969 > 25$ et $0,2 < p_0 = 0,5 < 0,8$.
- Diagramme en bâtons de la loi de la v.a. X sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$: [Voir le diagramme en bâtons](#)
- Visualisation de la règle de décision avec l'IF-Seconde et réflexion sur la notion d'IF : [Voir la règle](#)

Un exemple : La pièce de Buffon (1777)

- Expérience relatée dans *Essai d'Arithmétique morale* (1777) : Buffon lance 4040 fois une pièce et il obtient 2049 fois "Pile". La pièce est-elle équilibrée ?
- La v.a. $X = \text{"Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers"}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040 ; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*" (i.e. $p = p_0 = 0,5$).
- Les conditions de validité de l'utilisation de l'IF-Seconde sont vérifiées : $n = 5969 > 25$ et $0,2 < p_0 = 0,5 < 0,8$.
- Diagramme en bâtons de la loi de la v.a. X sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$: [Voir le diagramme en bâtons](#)
- Visualisation de la règle de décision avec l'IF-Seconde et réflexion sur la notion d'IF : [Voir la règle](#)

Un exemple : La pièce de Buffon (1777)

- Expérience relatée dans *Essai d'Arithmétique morale* (1777) : Buffon lance 4040 fois une pièce et il obtient 2049 fois "Pile". La pièce est-elle équilibrée ?
- La v.a. $X = \text{"Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers"}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040 ; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*" (i.e. $p = p_0 = 0,5$).
- Les conditions de validité de l'utilisation de l'IF-Seconde sont vérifiées : $n = 5969 > 25$ et $0,2 < p_0 = 0,5 < 0,8$.
- Diagramme en bâtons de la loi de la v.a. X sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$: [Voir le diagramme en bâtons](#)
- Visualisation de la règle de décision avec l'IF-Seconde et réflexion sur la notion d'IF : [Voir la règle](#)

Un exemple : La pièce de Buffon (1777)

- Expérience relatée dans *Essai d'Arithmétique morale* (1777) : Buffon lance 4040 fois une pièce et il obtient 2049 fois "Pile". La pièce est-elle équilibrée ?
- La v.a. $X = \text{"Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers"}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040 ; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*" (i.e. $p = p_0 = 0,5$).
- Les conditions de validité de l'utilisation de l'IF-Seconde sont vérifiées : $n = 5969 > 25$ et $0,2 < p_0 = 0,5 < 0,8$.
- Diagramme en bâtons de la loi de la v.a. X sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$: [Voir le diagramme en bâtons](#)
- Visualisation de la règle de décision avec l'IF-Seconde et réflexion sur la notion d'IF : [Voir la règle](#)

Commentaires

- Dans cette activité, les enjeux de la situation sont les mêmes "à droite" et "à gauche".
- La nature de la situation justifie de partager le risque (5%) de façon égale et bilatérale .
- Ici on souhaite décider entre les deux hypothèses : "*La pièce est équilibrée*" (i.e. $p = p_0 = 0,5$) et "*La pièce n'est pas équilibrée*" (i.e. $p \neq 0,5$).
- Les diagrammes de F et de X sont les mêmes : raisonnements avec X ou F équivalents, mais X plus commode.
- Le diagramme est symétrique, centré sur $np = 2020$.
- Le fait que l'IF soit centré ne joue pas de rôle dans la démarche de prise de décision.

IF-Seconde : aspects mathématiques

- La formulation de l'IF-Seconde est admise ; éventuellement justifiée par simulation.
- La formule de l'IF-Seconde n'est valable que pour les grandes binomiales : $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$.
- Le seuil 95% de l'IF est figé car lié à l'expression de l'IF admise. Il ne peut pas être changé.
- Le risque de 5% est partagé à hauteur de 2,5% de chaque côté de l'IF : deux zones de rejet (risque bilatéral symétrisé).
- Conséquence : L'IF-Seconde est centré sur p_0 car les grandes binomiales sont symétriques et centrées sur leur espérance.
- C'est parce que le risque est symétrisé, que l'IF est centré (non l'inverse).

IF-Seconde : interprétation

- L'IF-Seconde est l'endroit où on s'attend à observer la v.a. de décision F si l'hypothèse $p = p_0$ est bonne.
- La v.a. de décision peut varier dans l'IF : c'est la **fluctuation** due au hasard.
- Si l'hypothèse $p = p_0$ est bonne, la v.a. de décision peut quand même sortir de l'IF, mais ceci est très peu probable (probabilité $\leq 0,05$).
- Si la v.a. de décision sort de l'IF, ce n'est pas uniquement dû au hasard : c'est **significatif** que l'hypothèse $p = p_0$ n'est pas bonne.
- La probabilité de rejeter à tort l'hypothèse $p = p_0$ est 0,05.

Avec la loi binomiale

Buffon : calculs avec la loi binomiale

- La variable aléatoire "*Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers*" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040 ; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*". Les calculs sont conduits avec $p = p_0 = 0,5$.
- Raisonnement avec X et prise de décision en exploitant la loi binomiale sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$:
Raisonner avec les probabilités cumulées
- Visualisation de la règle de décision : Voir la règle

Buffon : calculs avec la loi binomiale

- La variable aléatoire "*Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers*" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040 ; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*". Les calculs sont conduits avec $p = p_0 = 0,5$.
- Raisonnement avec X et prise de décision en exploitant la loi binomiale sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$:
Raisonnement avec les probabilités cumulées
- Visualisation de la règle de décision : Voir la règle

Buffon : calculs avec la loi binomiale

- La variable aléatoire "*Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers*" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040 ; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*". Les calculs sont conduits avec $p = p_0 = 0,5$.
- Raisonnement avec X et prise de décision en exploitant la loi binomiale sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$:

Raisonnement avec les probabilités cumulées

- Visualisation de la règle de décision : [Voir la règle](#)

Buffon : calculs avec la loi binomiale

- La variable aléatoire "*Nombre de 'Pile' obtenu sur les 4040 lancers*" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4040 ; p)$, où p est inconnu.
- L'hypothèse à tester est "*La pièce est équilibrée*". Les calculs sont conduits avec $p = p_0 = 0,5$.
- Raisonnement avec X et prise de décision en exploitant la loi binomiale sous l'hypothèse $p = p_0 = 0,5$:

Raisonner avec les probabilités cumulées

- Visualisation de la règle de décision : [Voir la règle](#)

Comparaison avec la Seconde

- L'IF bilatéral pour X , $[1958 ; 2082]$ (resp. pour F , $[0,4847 ; 0,5153]$) est obtenu par un calcul exact (IF-exact). Il est centré sur la valeur $np = 2020$ (resp. $p = 0,5$).
- L'IF exact $[0,4847 ; 0,5153]$ est strictement inclus dans l'IF-Seconde $[0,4843 ; 0,5157]$.
- Ici, l'IF bilatéral calculé avec la loi binomiale pour F est très proche de l'IF-Seconde.
- Les deux méthodes de prise de décision (avec IF-exact et IF-Seconde) conduisent ici pratiquement à la même décision.
- ♣ Attention ! Si observation près des bornes, c'est l'IF-exact (et non l'IF-Seconde) qu'il faut utiliser pour décider.

Second exemple : retour à Woburn

- La variable aléatoire "*Nombre de cas de leucémie obtenu sur les 5969 adolescents*" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5969; p)$, où p est inconnu.
- Deux problématiques pour le décideur :
 - La situation est-elle normale à Woburn ?
 - La situation est-elle dangereuse pour la santé à Woburn ?

Second exemple : retour à Woburn

- La variable aléatoire "*Nombre de cas de leucémie obtenu sur les 5969 adolescents*" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5969; p)$, où p est inconnu.
- Deux problématiques pour le décideur :
 - 1 La situation est-elle normale à Woburn ?
 - 2 La situation est-elle dangereuse pour la santé à Woburn ?

Second exemple : retour à Woburn

- La variable aléatoire "*Nombre de cas de leucémie obtenu sur les 5969 adolescents*" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5969; p)$, où p est inconnu.
- Deux problématiques pour le décideur :
 - 1 La situation est-elle normale à Woburn ?
 - 2 La situation est-elle dangereuse pour la santé à Woburn ?

Second exemple : retour à Woburn

- La variable aléatoire "*Nombre de cas de leucémie obtenu sur les 5969 adolescents*" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5969 ; p)$, où p est inconnu.
- Deux problématiques pour le décideur :
 - 1 La situation est-elle normale à Woburn ?
 - 2 La situation est-elle dangereuse pour la santé à Worburn ?

La situation est-elle normale à Woburn ?

- Raisonnement avec X et prise de décision (bilatérale) en exploitant la loi binomiale avec $p = p_0 = 0,00052$:

Raisonner avec les probabilités cumulées

La situation est-elle dangereuse à Worburn ?

- Raisonnement avec X et prise de décision (unilatérale) en exploitant la loi binomiale avec $p = p_0 = 0,00052$:

Raisonner avec les probabilités cumulées

Commentaires

- Le choix des hypothèses est effectué en premier. Il dépend des préoccupations du décideur liées aux enjeux (économiques, sociaux, sanitaires, politiques, ...) de la situation.
- Le choix des hypothèses induit ensuite la forme de la zone de rejet et la forme de l'IF.
- Il est nécessaire de faire une analyse de la signification concrète des risques encourus.
- Dans cette activité, les erreurs ne correspondent pas au même enjeu "à droite" et "à gauche".
- La nature de la situation conduit donc plutôt à envisager un risque unilatéral.

Choix des hypothèses

- Soit on souhaite décider entre "*La situation est normale*" (i.e. $p = 0.00052$) et "*La situation n'est pas normale*" (i.e. $p \neq 0.00052$) : risque bilatéral.
- Soit on souhaite décider entre "*La situation présente un danger pour la santé*" (i.e. $p > 0,00052$) et "*La situation ne présente pas un danger pour la santé*" (i.e. $p \leq 0,00052$) : risque unilatéral.
- Dans les deux cas les calculs sont effectués avec $p = 0,00052$.
- La variable de décision utilisée est $X = nF$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5969; p = 0,00052)$.

Décisions et choix du seuil

- Comme l'observation donne $x = 9$, on décide que la situation est, avec le même seuil 95%,
 - * anormale en utilisant l'IF bilatéral,
 - * dangereuse en utilisant l'IF unilatéral.
- Il y a 5% de chances de se tromper en prenant chacune de ces décisions.
- Si l'observation avait donné $x = 0$ ou $x = 7$, on aurait été amené à déclarer la situation :
 - * anormale avec l'IF bilatéral au seuil 90%,
 - * mais normale avec l'IF bilatéral au seuil 95%.
- Avec le même seuil 95%, si l'observation avait donné $x = 7$, on aurait été amené à déclarer la situation :
 - * normale en utilisant l'IF bilatéral,
 - * mais dangereuse en utilisant l'IF unilatéral.

Remarques sur l'IF exact et l'IF-Seconde

- L'IF correspond à la zone de non-rejet de l'hypothèse testée, complémentaire de la zone de rejet.
- l'IF exact unilatéral $[0 ; 0,001]$ et l'IF exact bilatéral $[0 ; 0,0012]$ déterminés ici pour le même seuil 95% sont nettement différents de l'IF-Seconde :

$$\left[0,00052 - \frac{1}{\sqrt{5969}} ; 0,00052 + \frac{1}{\sqrt{5969}} \right] = [-0,0124 ; 0,0135] .$$

- Il serait aberrant d'utiliser l'IF-Seconde dans le contexte de cette situation pour prendre la décision (petite binomiale).

Formalisation de la prise de décision avec la loi binomiale

IF bilatéral exact : construction avec $X = nF$

La variable de décision considérée ici est l'effectif empirique $X = nF$ de loi $\mathcal{B}(n; p_0)$ où p_0 est donnée.

- L'intervalle de fluctuation bilatéral exact pour X au seuil 95% est l'intervalle déterministe $[a, b]$, où

- * a est le plus petit entier tel que $\mathbb{P}(X \leq a) > 0,025$;
- * b est le plus petit entier tel que $\mathbb{P}(X \leq b) \geq 0,975$.

♣ Faire attention aux inégalités $>$ et $\geq$!

♣ L'IF bilatéral exact pour la fréquence empirique F au seuil 95% est alors $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right]$.

♣ Les entiers a et b dépendent de la taille n de l'échantillon.

IF bilatéral exact et prise de décision

La v.a. de décision considérée est $X = nF$ de loi $\mathcal{B}(n; p_0)$ où p_0 est donnée.

Suivant la même démarche qu'en Seconde, si $[a, b]$ est l'intervalle de fluctuation bilatéral exact pour l'effectif empirique $X := nF$ au seuil 95%, on lui associera la méthode suivante de prise de décision :

Pour décider si $p = p_0$, on prélève un échantillon de taille n et on calcule la fréquence observée $f = \frac{x}{n}$, où x est l'effectif (nombre de succès) observé :

- Si $f \notin \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right]$ (i.e. $x \notin [a, b]$), on décide que $p \neq p_0$.
- Si $f \in \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right]$ (i.e. $x \in [a, b]$), on décide que $p = p_0$.

Commentaires

- $\mathbb{P}\left(F \in \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]\right) = \mathbb{P}(X \in [a, b])$ où $X = nF$ est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n, p_0)$: on peut raisonner avec X ou F et les IF correspondants.
- Cette méthode,
 - * est conduite avec des calculs exacts ;
 - * est valable pour toute binomiale avec n et p quelconques ;
 - * se généralise aisément au cas où le seuil choisi n'est plus 95% ;
 - * englobe la méthode vue en Seconde.

La démarche de prise de décision

Trois étapes :

- 1 L'ANALYSE CONCRÈTE DE LA SITUATION**
- 2 LA FORMALISATION THÉORIQUE
- 3 L'APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

La démarche de prise de décision

Trois étapes :

- 1 L'ANALYSE CONCRÈTE DE LA SITUATION
- 2 LA FORMALISATION THÉORIQUE
- 3 L'APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

La démarche de prise de décision

Trois étapes :

- 1 L'ANALYSE CONCRÈTE DE LA SITUATION
- 2 LA FORMALISATION THÉORIQUE
- 3 L'APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

La démarche de prise de décision

Étape 1 - ANALYSE CONCRÈTE DE LA SITUATION

Compte tenu du contexte réel de la situation et de ses enjeux, on commencera par préciser :

- les conditions de l'observation : notamment, taille de l'échantillon à observer,
- les deux hypothèses à prendre en compte,
- la variable de décision à utiliser (la fréquence empirique F ou l'effectif empirique $X = nF$),
- la forme de la zone, bilatérale ou unilatérale, qui conduira à rejeter l'hypothèse,
- le seuil utilisé pour l'IF (en Seconde : obligatoirement 95% ; en Première : autre valeur techniquement possible).

La démarche de prise de décision

Étape 1 - ANALYSE CONCRÈTE DE LA SITUATION

Compte tenu du contexte réel de la situation et de ses enjeux, on commencera par préciser :

- les conditions de l'observation : notamment, taille de l'échantillon à observer,
- les deux hypothèses à prendre en compte,
- la variable de décision à utiliser (la fréquence empirique F ou l'effectif empirique $X = nF$),
- la forme de la zone, bilatérale ou unilatérale, qui conduira à rejeter l'hypothèse,
- le seuil utilisé pour l'IF (en Seconde : obligatoirement 95% ; en Première : autre valeur techniquement possible).

La démarche de prise de décision

Étape 1 - ANALYSE CONCRÈTE DE LA SITUATION

Compte tenu du contexte réel de la situation et de ses enjeux, on commencera par préciser :

- les conditions de l'observation : notamment, taille de l'échantillon à observer,
- les deux hypothèses à prendre en compte,
- la variable de décision à utiliser (la fréquence empirique F ou l'effectif empirique $X = nF$),
- la forme de la zone, bilatérale ou unilatérale, qui conduira à rejeter l'hypothèse,
- le seuil utilisé pour l'IF (en Seconde : obligatoirement 95% ; en Première : autre valeur techniquement possible).

La démarche de prise de décision

Étape 1 - ANALYSE CONCRÈTE DE LA SITUATION

Compte tenu du contexte réel de la situation et de ses enjeux, on commencera par préciser :

- les conditions de l'observation : notamment, taille de l'échantillon à observer,
- les deux hypothèses à prendre en compte,
- la variable de décision à utiliser (la fréquence empirique F ou l'effectif empirique $X = nF$),
- la forme de la zone, bilatérale ou unilatérale, qui conduira à rejeter l'hypothèse,
- le seuil utilisé pour l'IF (en Seconde : obligatoirement 95% ; en Première : autre valeur techniquement possible).

La démarche de prise de décision

Étape 1 - ANALYSE CONCRÈTE DE LA SITUATION

Compte tenu du contexte réel de la situation et de ses enjeux, on commencera par préciser :

- les conditions de l'observation : notamment, taille de l'échantillon à observer,
- les deux hypothèses à prendre en compte,
- la variable de décision à utiliser (la fréquence empirique F ou l'effectif empirique $X = nF$),
- la forme de la zone, bilatérale ou unilatérale, qui conduira à rejeter l'hypothèse,
- le seuil utilisé pour l'IF (en Seconde : obligatoirement 95% ; en Première : autre valeur techniquement possible).

La démarche de prise de décision (suite)

■ Étape 2 - FORMALISATION THÉORIQUE

La théorie permet de préciser :

- * la loi de la variable de décision sous l'hypothèse testée et sous les conditions de l'observation,
- * les bornes de l'IF pour la variable de décision considérée,
- * la règle de décision associée à l'IF.

■ Étape 3 - APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

Après l'observation d'un échantillon de taille n :

- * on calcule la valeur observée de la variable de décision,
- * on applique la règle de décision énoncée dans la partie théorique.

La démarche de prise de décision (suite)

■ Étape 2 - FORMALISATION THÉORIQUE

La théorie permet de préciser :

- * la loi de la variable de décision sous l'hypothèse testée et sous les conditions de l'observation,
- * les bornes de l'IF pour la variable de décision considérée,
- * la règle de décision associée à l'IF.

■ Étape 3 - APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

Après l'observation d'un échantillon de taille n :

- * on calcule la valeur observée de la variable de décision,
- * on applique la règle de décision énoncée dans la partie théorique.

La démarche de prise de décision (suite)

■ Étape 2 - FORMALISATION THÉORIQUE

La théorie permet de préciser :

- * la loi de la variable de décision sous l'hypothèse testée et sous les conditions de l'observation,
- * les bornes de l'IF pour la variable de décision considérée,
- * la règle de décision associée à l'IF.

■ Étape 3 - APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

Après l'observation d'un échantillon de taille n :

- * on calcule la valeur observée de la variable de décision,
- * on applique la règle de décision énoncée dans la partie théorique.

La démarche de prise de décision (suite)

■ Étape 2 - FORMALISATION THÉORIQUE

La théorie permet de préciser :

- * la loi de la variable de décision sous l'hypothèse testée et sous les conditions de l'observation,
- * les bornes de l'IF pour la variable de décision considérée,
- * la règle de décision associée à l'IF.

■ Étape 3 - APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

Après l'observation d'un échantillon de taille n :

- * on calcule la valeur observée de la variable de décision,
- * on applique la règle de décision énoncée dans la partie théorique.

La démarche de prise de décision (suite)

■ Étape 2 - FORMALISATION THÉORIQUE

La théorie permet de préciser :

- * la loi de la variable de décision sous l'hypothèse testée et sous les conditions de l'observation,
- * les bornes de l'IF pour la variable de décision considérée,
- * la règle de décision associée à l'IF.

■ Étape 3 - APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

Après l'observation d'un échantillon de taille n :

- * on calcule la valeur observée de la variable de décision,
- * on applique la règle de décision énoncée dans la partie théorique.

La démarche de prise de décision (suite)

■ Étape 2 - FORMALISATION THÉORIQUE

La théorie permet de préciser :

- * la loi de la variable de décision sous l'hypothèse testée et sous les conditions de l'observation,
- * les bornes de l'IF pour la variable de décision considérée,
- * la règle de décision associée à l'IF.

■ Étape 3 - APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

Après l'observation d'un échantillon de taille n :

- * on calcule la valeur observée de la variable de décision,
- * on applique la règle de décision énoncée dans la partie théorique.

La démarche de prise de décision (suite)

■ Étape 2 - FORMALISATION THÉORIQUE

La théorie permet de préciser :

- * la loi de la variable de décision sous l'hypothèse testée et sous les conditions de l'observation,
- * les bornes de l'IF pour la variable de décision considérée,
- * la règle de décision associée à l'IF.

■ Étape 3 - APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

Après l'observation d'un échantillon de taille n :

- * on calcule la valeur observée de la variable de décision,
- * on applique la règle de décision énoncée dans la partie théorique.

La démarche de prise de décision (suite)

■ Étape 2 - FORMALISATION THÉORIQUE

La théorie permet de préciser :

- * la loi de la variable de décision sous l'hypothèse testée et sous les conditions de l'observation,
- * les bornes de l'IF pour la variable de décision considérée,
- * la règle de décision associée à l'IF.

■ Étape 3 - APPLICATION DE LA THÉORIE À L'OBSERVATION

Après l'observation d'un échantillon de taille n :

- * on calcule la valeur observée de la variable de décision,
- * on applique la règle de décision énoncée dans la partie théorique.

Pour conclure

Sur les raisonnements utilisés

- Réinvestissement de la Troisième et de la Seconde (expérience aléatoire, arbres, modèles, événement, prise de décision, ...).
- Justification de la règle de multiplication de probabilités sur les arbres.
- Travail sur la notion de v.a. et de loi de probabilité.
- Possibilité de mener des calculs exacts avec la loi binomiale.
- Importance de la signification concrète de la situation, et du regard du décideur sur celle-ci, dans la formulation des hypothèses, l'analyse des enjeux et la forme de l'IF.

Sur la notion d'IF

- **En Seconde** : un IF admis, au seuil 95% figé, mais immédiatement opérationnel en classe pour la prise de décision sous certaines conditions.
- **En Première** : en prenant appui sur la pratique de la Seconde, introduction d'un IF bilatéral par un algorithme de détermination, valable pour un seuil donné et pour toute loi binomiale sans condition, qui :
 - * réinvestit la connaissance exacte de la loi binomiale introduite à ce niveau ;
 - * se construit facilement avec un tableur à partir des probabilités cumulées ;
 - * rejoint pratiquement, pour les grandes binomiales, l'IF admis en Seconde ;
 - * permet d'élargir le champ d'application de la démarche de prise de décision vue en Seconde.

Bibliographie

Bibliographie



Ducel Y., Saussereau B.,

Quelle problématique pour un enseignement des probabilités en Troisième ?

Repères IREM, 77, octobre 2009, pages 55-65, Topiques éditions, Nancy, 2009.



Ducel Y., Larnaudie F., Saussereau B.,

Activités de probabilités de la Troisième à la Seconde

Repères IREM, en préparation.

Bibliographie



Ducel Y., Saussereau B.,

Quelle problématique pour un enseignement des probabilités en Troisième ?

Repères IREM, 77, octobre 2009, pages 55-65, Topiques éditions, Nancy, 2009.



Ducel Y., Larnaudie F., Saussereau B.,

Activités de probabilités de la Troisième à la Seconde

Repères IREM, en préparation.

Bibliographie



Ducl Y.,

Les probabilités en Troisième et Seconde : mise en perspective des programmes

Diaporama, Atelier, 24 octobre 2010, Journées nationales de l'APMEP, Paris, 2010.



Ministère Éducation nationale,

Ressources pour la classe en baccalauréat professionnel -
extrait : Probabilités et statistiques

Document de travail, avril 2009.

Bibliographie



Ducel Y.,

Les probabilités en Troisième et Seconde : mise en perspective des programmes

Diaporama, Atelier, 24 octobre 2010, Journées nationales de l'APMEP, Paris, 2010.



Ministère Éducation nationale,

Ressources pour la classe en baccalauréat professionnel -
extrait : Probabilités et statistiques

Document de travail, avril 2009.

Merci de votre attention

Pour me contacter ...

- **Yves Ducl**

Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques
(IREM)

- **Téléphone** : +33(0)3 81 66 62 32

Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

- **Adresse postale** : IREM - Département de mathématiques
UFR Sciences et techniques de l'Université de Franche-Comté
16, route de Gray, F-25030 Besançon cedex

- ♣ **Site Web de l'IREM** : [http ://www-irem.univ-fcomte.fr/](http://www-irem.univ-fcomte.fr/)