

Rallye mathématique de Franche- Comté

Finale 2009

Croix dans un carré



E n o n c é

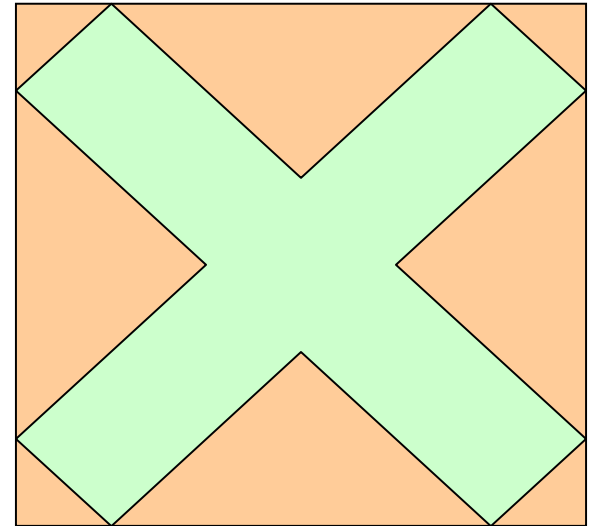
Dans un carré est inscrite une croix comme l'indique la figure ci-contre.

Les quatre axes de symétrie du carré sont également les axes de symétrie de la croix.

Les côtés de la croix sont deux à deux perpendiculaires ou parallèles.

Construisez une croix dans un carré de côté 6cm telle que l'aire de la croix soit égale à la moitié de l'aire du carré.

Justifiez votre démarche.



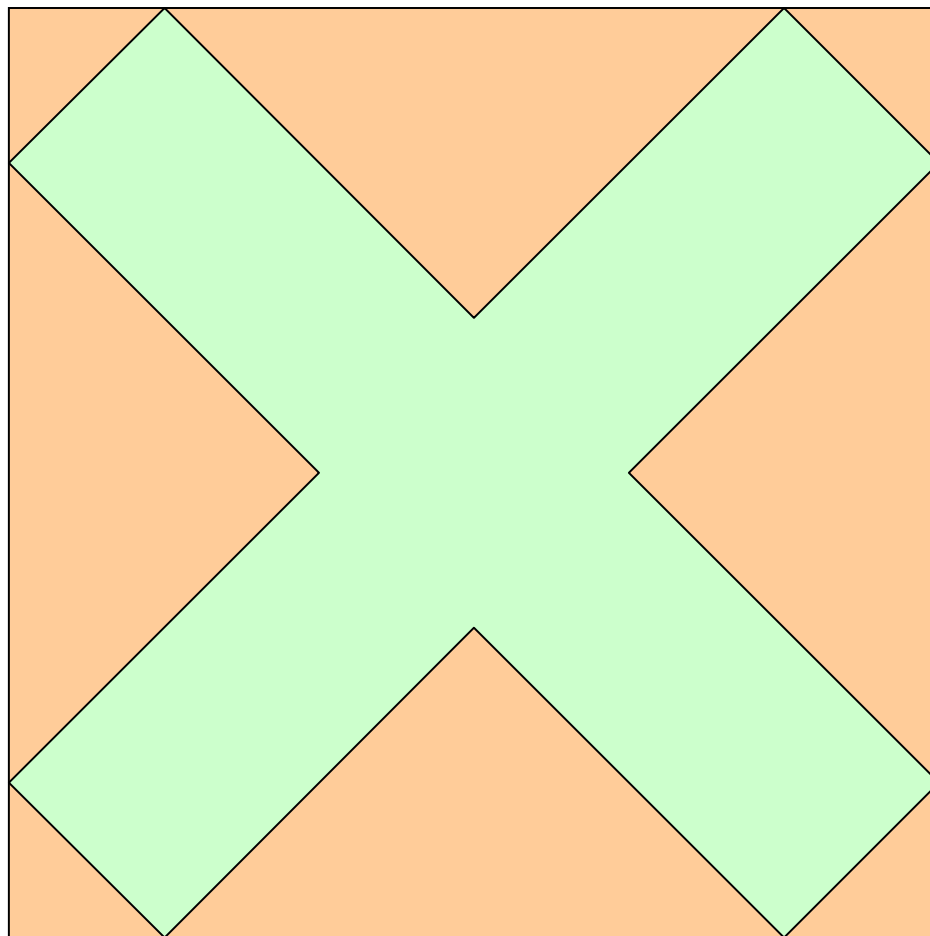


Figure 1

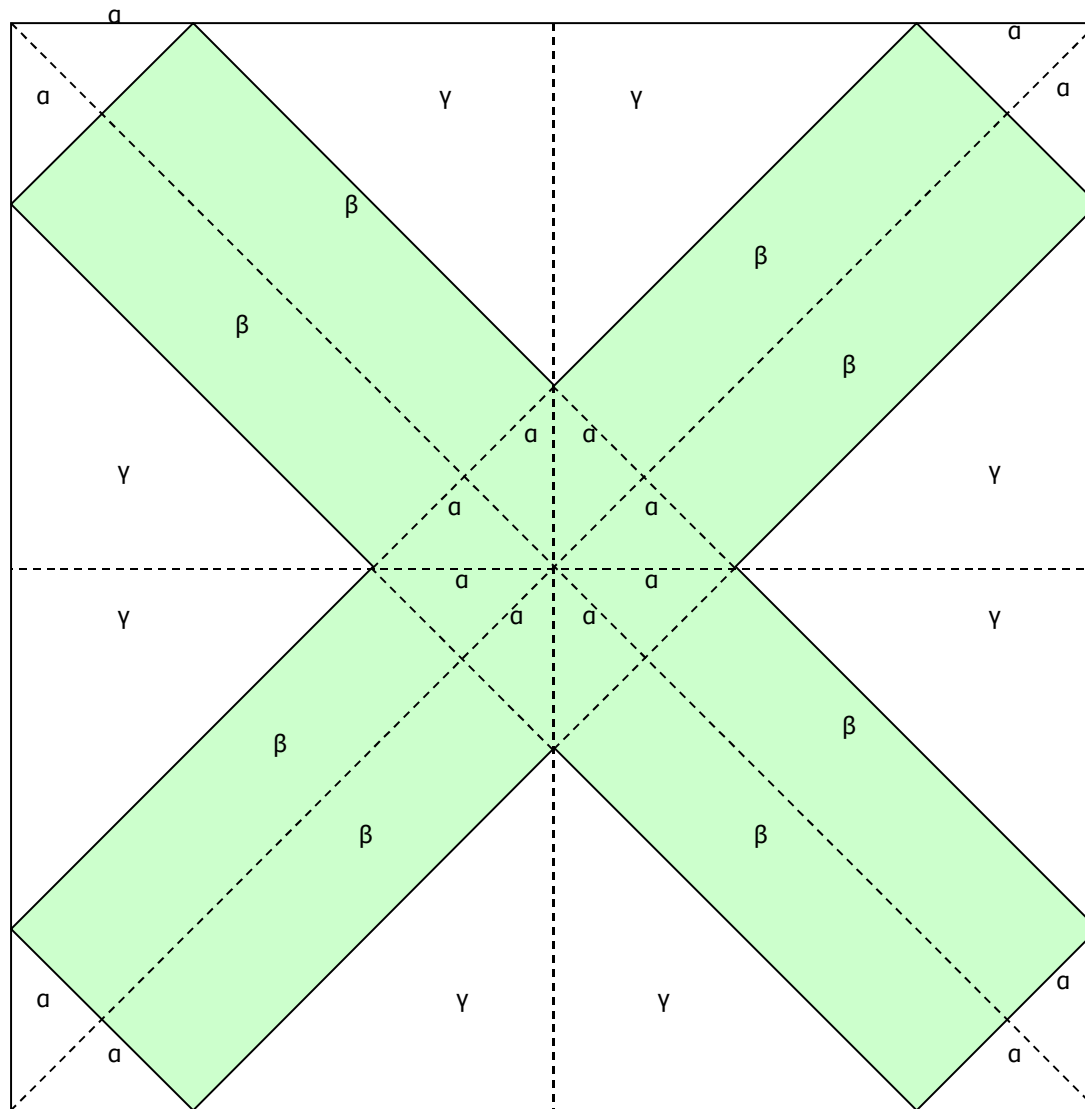


Figure 2

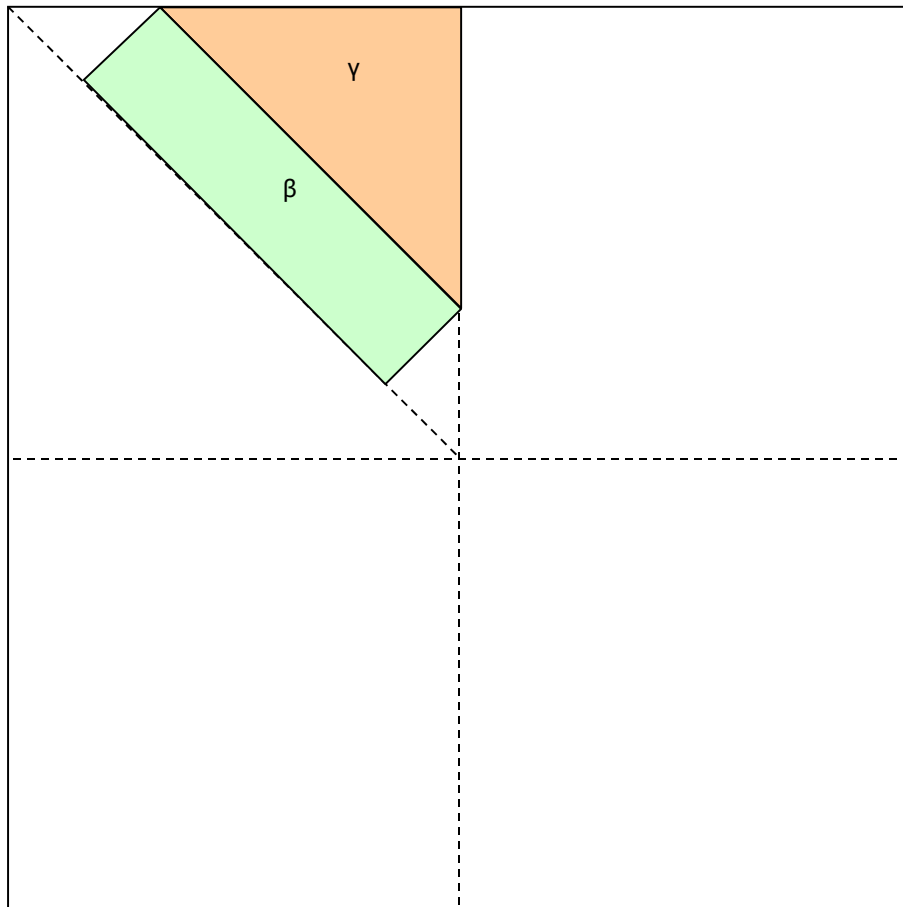


Figure 3

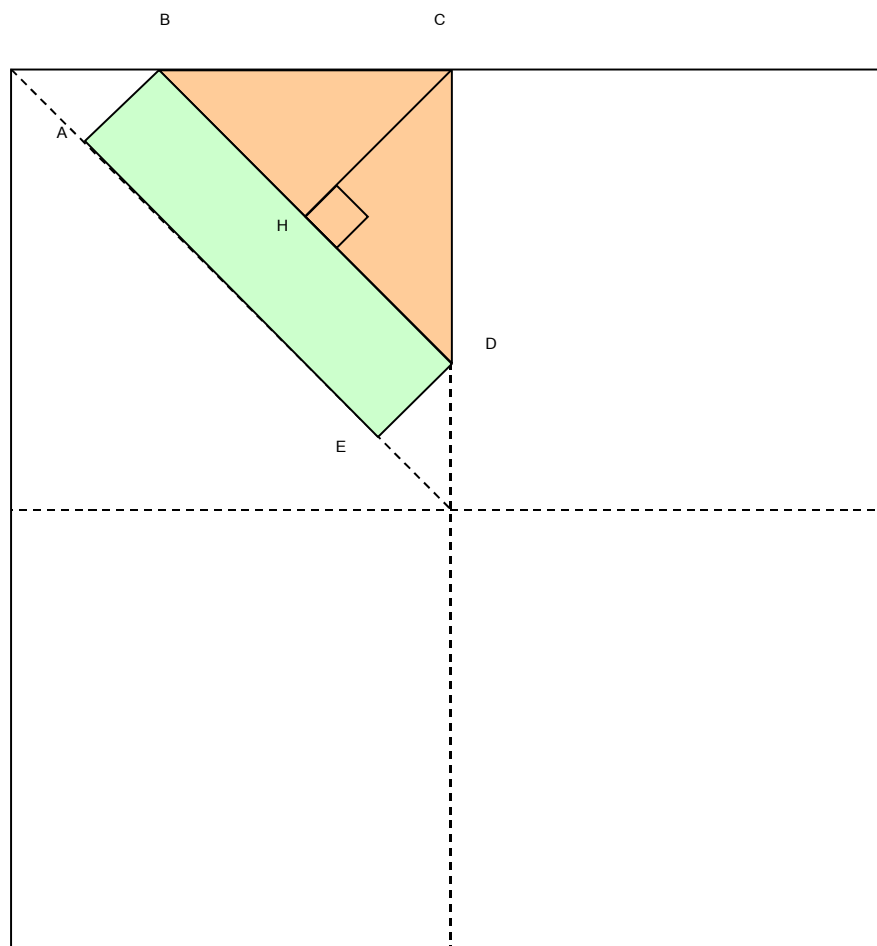
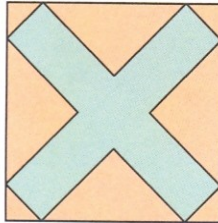


Figure 4

Autre methode



Soit un carré ABCD, M le sommet de la croix sur le côté $[AB]$ du côté de A, I le milieu de $[AB]$. On pose x la distance de I à M, avec x strictement compris entre 0 et 3. L'aire du carré est de 36 cm^2 , calculons l'aire de la croix en fonction de x .

La largeur d'une bande est $(3-x)\sqrt{2}$, la longueur d'une bande est $(3+x)\sqrt{2}$. L'aire du carré, superposition des deux bandes est $(3-x)\sqrt{2} \cdot (3-x)\sqrt{2}$.

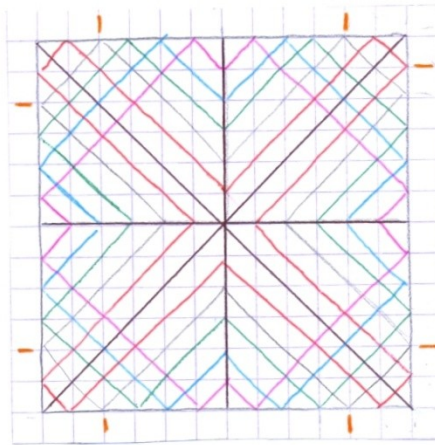
L'aire de la croix est donc $2 \cdot (3-x) \cdot \sqrt{2} \cdot (3+x) \cdot \sqrt{2} - (3-x)\sqrt{2} \cdot (3-x)\sqrt{2}$.

La condition demandé se traduit par :

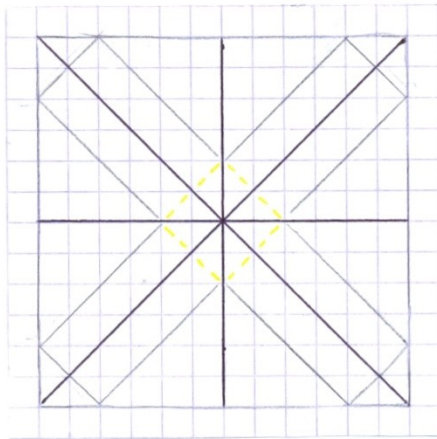
$$2 \cdot (3-x) \cdot \sqrt{2} \cdot (3+x) \cdot \sqrt{2} - (3-x)\sqrt{2} \cdot (3-x)\sqrt{2} = 18 \text{ ce qui est équivalent à } x \cdot (x-2) = 0$$

Les solutions de cette équation sont : 0 et 2. Compte tenu des conditions, 2 est la solution à ce problème.

Fiche réponse du problème n° 4 "Croix dans un carré"



- On a calculé l'aire du carré de 6cm de côté
 $6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$
 - On a divisé le résultat par deux pour obtenir l'aire de la croix
 $36 \div 2 = 18 \text{ cm}^2$
 - Nous avons tracé les 4 axes de symétrie.
 - Ensuite nous avons représenté toute les croix possibles en plaçant les points de 5mm avec les points de la croix précédente et de contact avec le carré nous avons d'abord calculé l'aire des 2 croix les plus cohérente avec le modèle
- aire de la croix retenue :
 (point d'intersection avec le carré à 1cm des coins).



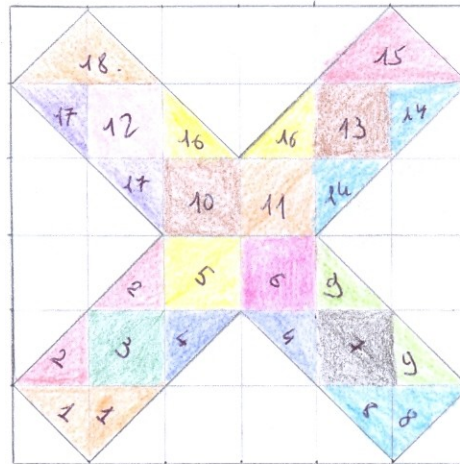
$$1,5 \times 7 = 10,50 \text{ cm}^2$$

$$10,50 \times 2 = 21 \text{ cm}^2$$

on retire l'aire du carré central (1,5 + 1,5)

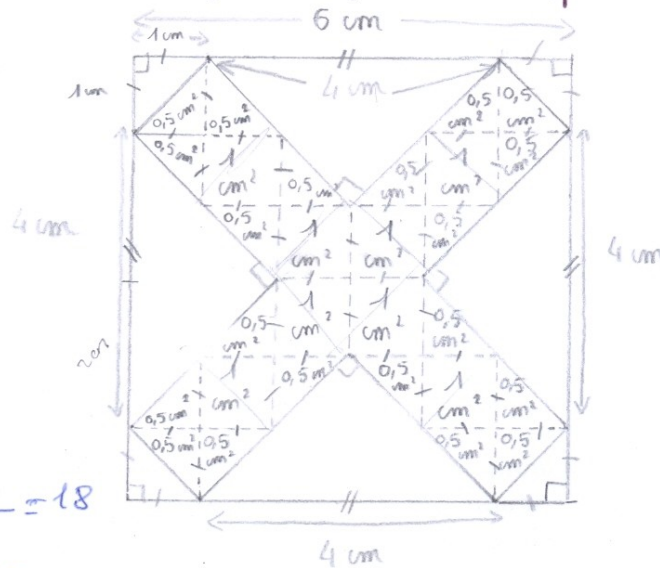
$$= 3 \quad 21 - 3 = 18 \text{ cm}^2$$

Fiche réponse du problème n° 4



Nous avons quadrillé un carré de 6 cm de côté en carré de 1 cm^2 . Nous avons ensuite tracé une croix de 18 cm^2 suivant les diagonales. La superficie de la croix est égale à la moitié de la superficie du carré qui est de 36 cm^2 .

Fiche réponse du problème n° 4



$$\text{Aire de la croix} = \frac{36}{2} = 18$$

$$\text{Aire de la croix} = 1 \times 8 + 0,5 \times 20 = 8 + 10 = 18 \text{ cm}^2.$$

On partage la croix en petits carrés de $1 \times 1 = 1$

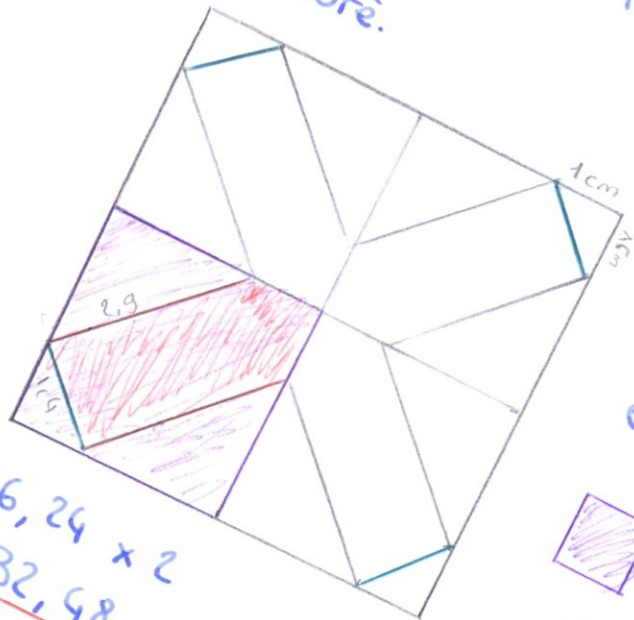
et $\frac{18}{1} = 18$ et dans la croix il y a 18 carrés.

Donc les carrés doivent être de 1 cm de côtés.

du problème n° 9.

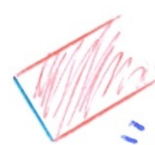
égale à la moitié de l'aire du carré.

côté x côté.



Pour construire les seg
de couleur - nous avons
un centimètre de chaque
extrémités.

 = Aire = $3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$
= 9 cm

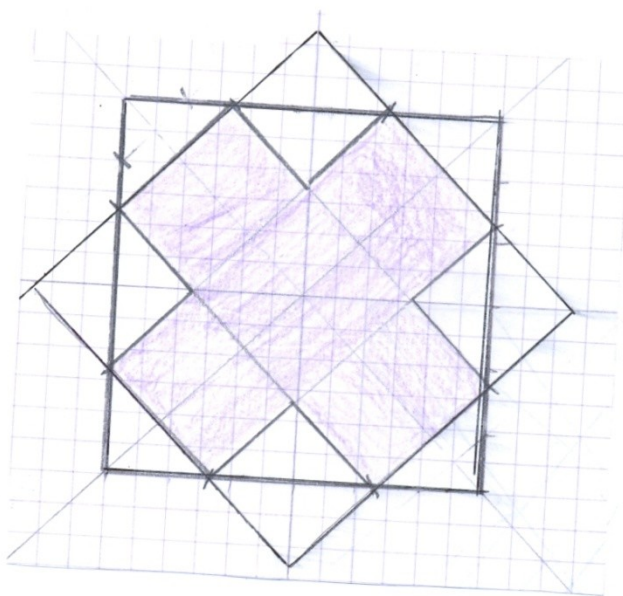
 = Aire = $2,9\text{ cm} \times 1,6$
= 4,64

$16,24 \times 2$
= 32,48

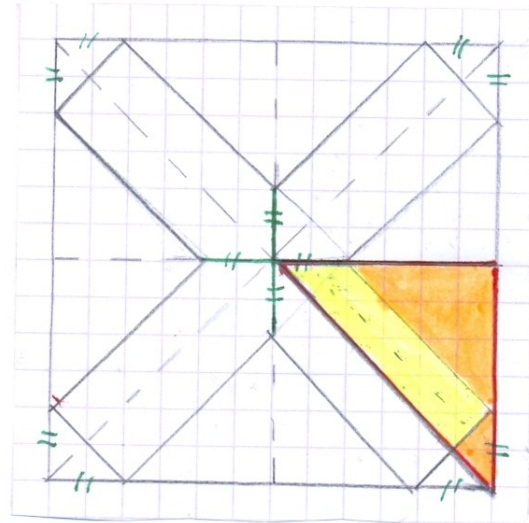
32,48 Aire
du carré

Fiche réponse du problème n° 4

(36 cm²)
L'aire du carré V est deux fois plus grande que celle de la croix. (18 cm²). Nous avons tracé le carré de 6 cm de côté, avons tracé les diagonales et les axes de symétrie. On constate que la croix est construite dans un carré identique dont chaque sommet appartient à un axe de symétrie.



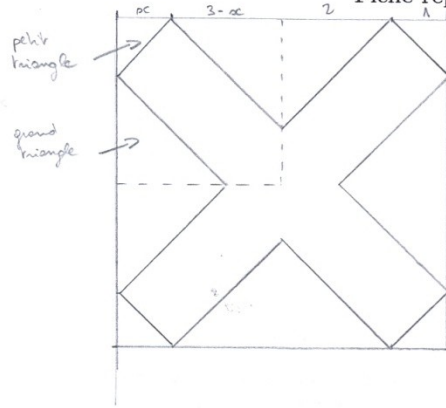
Exercice 4 :



On a tracé un carré de 6 cm de côté puis on a tracé les diagonales ensuite nous avons pris 1 cm sur chaque côté et 1 cm en partant du centre. On a relié les points entre eux.

On s'occupe de la partie colorée car c'est de la symétrie dans la partie orange il y a neuf carreaux et dans la partie jaune il y a 9 carreaux aussi donc la croix est deux fois plus grande.

Fiche réponse du problème n° 4



soit x la longueur comme sur la figure. on en déduit la longueur $x-3$. On étudie l'aire qui n'est pas celle de la croix dans un des quatre "coin du carré". On a :

- le "petit" triangle rectangle d'aire $\boxed{\frac{x^2}{2}}$
- les deux "grands" triangles rectangles rectangle réunis d'aire $\boxed{(3-x)^2}$

Comme le "coin" du carré correspond à un quart du carré et que les quatre "coins" sont identiques, l'aire de la partie qui n'est pas la croix est :

$$4 \left(\frac{x^2}{2} + (3-x)^2 \right)$$

On veut que cette surface soit égale à 18 (puisque l'aire du carré soit égale à 18)

$$4 \left(\frac{x^2}{2} + (3-x)^2 \right) = 18$$

$$6(x^2 - 4x + 12) = 0 \quad \text{car } \frac{6^2}{2} = 18$$

$$6(x-3)(x-1) = 0$$

$$2x^2 + 4(3-6x+x^2) = 18$$

$$2x^2 + 36 - 24x + 4x^2 = 18$$

$$6x^2 - 24x + 18 = 0$$

$$6(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$6(x^2 - 4x + 4 - 1) = 0$$

$$6(x-2)^2 - 6 \times 1 = 0$$

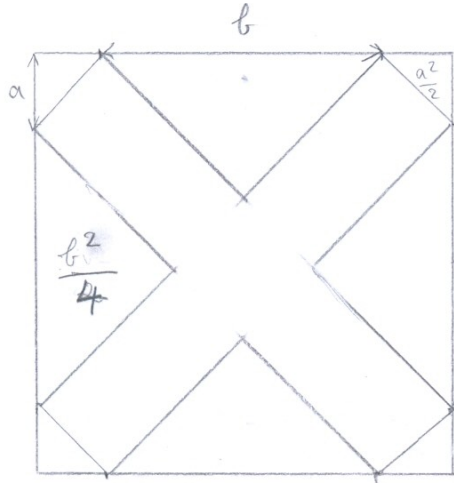
Sachant qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul :

$$x-3=0 \quad \text{et} \quad x-1=0$$

$$x=3 \quad \text{et} \quad x=1$$

x ne peut valoir 3, sinon, il n'y aurait plus de croix

donc x vaut 1.



$$\text{On a } 4\left(\frac{a^2}{2}\right) + 4\left(\frac{b^2}{4}\right) = 18$$

$$2a^2 + b^2 = 18$$

$$\frac{4a^2}{2} + \frac{4b^2}{4} = 18$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + b^2 = 18$$

$$\text{et } b = 6 - 2a$$

$$\text{donc } 2a^2 + (6 - 2a)^2 = 18$$

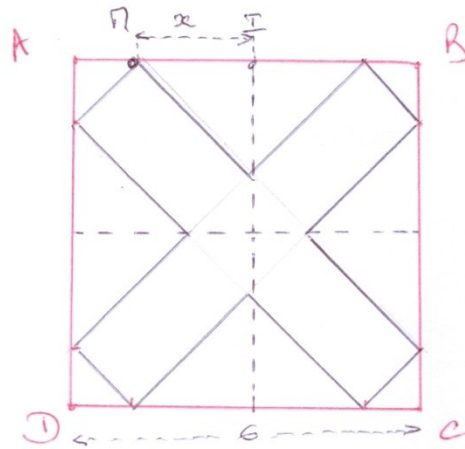
$$\text{donc } 2a^2 + 36 + 4a^2 - 24a = 18$$

$$6a^2 - 24a + 18 = 0$$

On essaye 1 comme solution:

$$6 \times 1^2 - 24 \times 1 + 18 = 0 \quad \text{donc } 1 \text{ est solution.}$$

$$\text{Donc } a = 1 \text{ et } b = 6 - 2a = 6 - 2 = 4.$$



Aire du carré : 36 cm^2

Soit $PI = x$ $0 < x < 3$

Dans le carré, en dehors de la croix, il reste

quatre triangles rectangles isocèles de côté $3-x$ (1)

quatre triangles rectangles isocèles dont l'hypoténuse est $2x$ (2)

(1) aire d'un triangle rectangle isocèle : $\frac{1}{2}(3-x) \times (3-x)$

(2) aire d'un triangle rectangle isocèle : $\frac{1}{2}x \times 2x$

La condition imposée se traduit par :

$$4 \times \frac{1}{2}(3-x)^2 + 4 \times \frac{1}{2}x \times 2x = 18$$

cette équation a même solution que : $x(2-x) = 0$

L'équation $x(2-x) = 0$ a deux solutions 0 et 2

Seul 2 convient.

