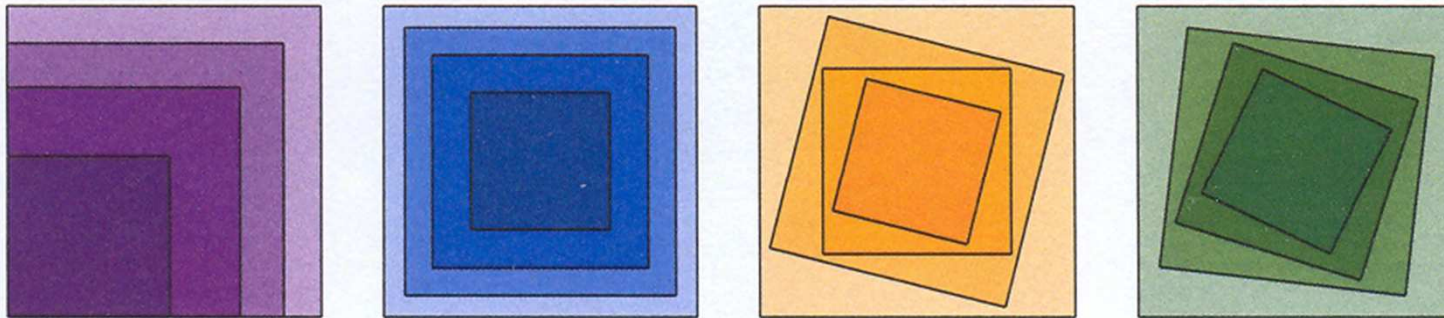


Carrés emboîtés



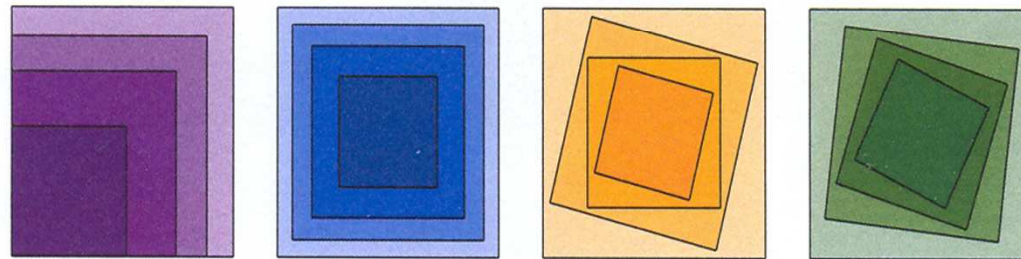
RMFC IREM Franche Comté

9 Carrés emboîtés

9.1 L'énoncé

Quatre artisans du bâtiment souhaitent unir leurs savoir-faire et leurs carnets de clientèle.

Ils font appel à un designer. Celui-ci leur demande de choisir chacun une couleur différente et leur propose de réaliser un logo de ces quatre couleurs. Pour ne vexer aucun des partenaires, il propose de superposer (sans débordement) quatre carrés de tailles et de couleurs différentes de façon que l'aire des surfaces laissées par chaque couleur soit la même.



Un énoncé de l'épreuve de qualification du 21 janvier 2010

<http://www-irem.univ-fcomte.fr/rallye/index.htm>

- Les dessins sont proposés pour une meilleure compréhension de l'énoncé.
- Pas de feuille réponse donnant ainsi le format du plus grand carré.
- Pas de donnée numérique pour les dimensions, cela permet une plus grande initiative des élèves.
- Pas de lettre, guidant les élèves vers une solution algébrique.

Analyse de quelques productions d'élèves

Les résultats peuvent être répartis en deux catégories:

Celles des élèves ayant compris le problème posé, pour 40% des productions.

Celles des élèves n'ayant pas compris le problème posé ou n'ayant pas abordé la recherche.

Dans la première catégorie, ces productions se répartissent en trois parties sensiblement de même effectif .

- Les éléments de solution sont très satisfaisants

Analyse des conditions imposées, mise en évidence d'une méthode et réalisation du dessin.

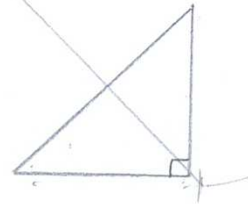
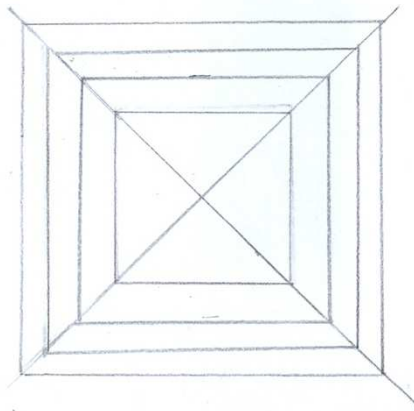
- Les éléments de solution sont satisfaisants

Analyse des conditions imposées, mise en évidence d'une méthode et réalisation du dessin par utilisation de valeurs approchées.

- Les éléments de solution restent à l'état de propositions satisfaisantes, mais non achevées.

Point de départ: le petit carré tracé.
Puis tracé à l'aide d'un compas.

Pour commencer, nous avons essayé de mettre en relation les aires. Nous avons trouvé que, l'aire du plus grand carré (36 cm^2) est égale à 4 fois l'aire du plus petit carré ($4 \times a^2$) donc à partir de là on construit des carrés en partant avec un carré a de 3 cm de côté. Pour calculer la racine carrée de 18 on fait un triangle rectangle de 3 de côté
ou fait de même pour trouver la racine carrée de 27



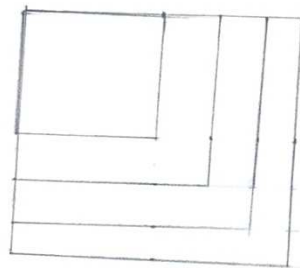
Point de départ : le petit carré

Le plus petit carré a pour côté x et donc pour aire $x^2 \text{ cm}^2$.

Sachant que le deuxième carré est recouvert par $x^2 \text{ cm}^2$, pour que la surface restante soit égale à l'aire du petit carré, il faut doubler cette aire : $2x^2 \text{ cm}^2$. Le côté du deuxième carré est donc $\sqrt{2}x$. De même pour le troisième carré, il faut tripler l'aire du petit carré : $3x^2 \text{ cm}^2$. La surface restante est donc égale à $3x^2 - 2x^2 = x^2 \text{ cm}^2$. Le côté est donc $\sqrt{3}x$.

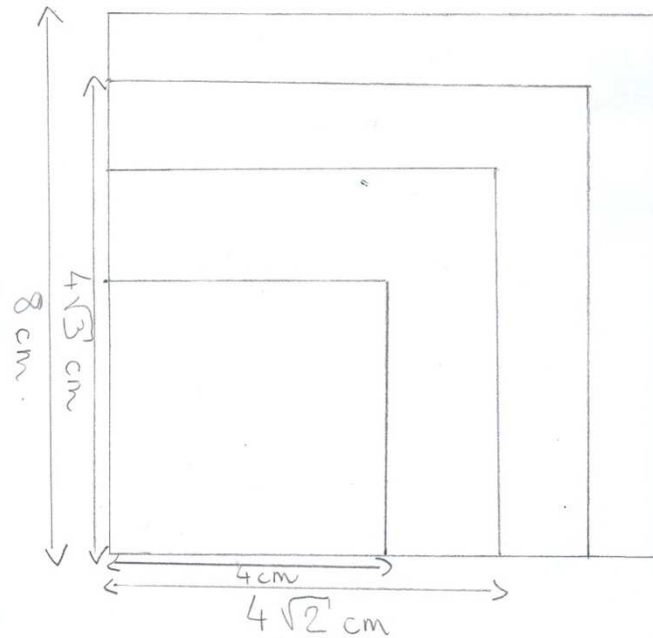
De même pour le quatrième carré on il faut quadrupler l'aire du plus petit carré : $4x^2 \text{ cm}^2$. La surface restante est égale à $4x^2 - 3x^2 = x^2 \text{ cm}^2$. Le côté est donc $\sqrt{4}x$.

Pour la construction, on choisit $x = 2$.



- 1^{er} carré : $C = 2 \text{ cm}$
- 2^e carré : $C = 2 \times \sqrt{2} \approx 2,8 \text{ cm}$
- 3^e carré : $C = 2 \times \sqrt{3} \approx 3,5 \text{ cm}$
- 4^e carré : $C = 2 \times \sqrt{4} = 4 \text{ cm}$

Point de départ : le petit carré



Pour $x = 4$ cm le ~~pe~~ côté du petit carré.

$$\begin{aligned} A_{\text{petit carré}} &= 4^2 \cdot \text{cm}^2 \\ &= 16 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

L'aire du 2^e carré doit être égale à $16 \times 2 = 32 \text{ cm}^2$.
donc son côté est égal à $\sqrt{32} \text{ cm}$
 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

L'aire du 3^e carré doit être égale à $16 \times 3 = 48 \text{ cm}^2$.
donc son côté est égal à $\sqrt{48} \text{ cm}$
 $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

L'aire du 4^e carré doit être égale à $16 \times 4 = 64 \text{ cm}^2$.
donc son côté est égal à $\sqrt{64} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

On fait le petit carré de côté 2 cm. Son aire est donc 4 cm^2 . On note l'aire à trouver du deuxième carré x .

Donc l'aire du deuxième carré est égale à $x - 4 = 4$
 $x = 8$

Donc le côté du 2^{ème} carré est $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 L'aire du 3^{ème} carré est y . $y - 8 = 4$

$$y = 12$$

$$y = 2\sqrt{3}$$

Le côté du 3^{ème} carré mesure $2\sqrt{3} \text{ cm}$

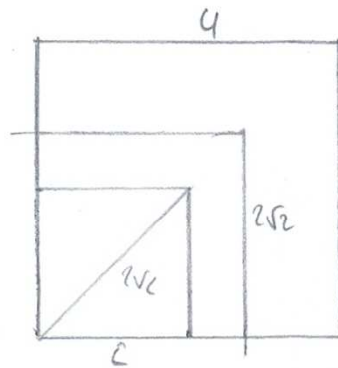
Le 4^{ème} côté est z .

$$z - 12 = 4$$

$$z = 16$$

Le 5^{ème} carré ferait $2\sqrt{3}$

Le côté du 4^{ème} carré mesure 4 cm.



Point de départ : le petit carré

Les coefficients d'agrandissement ne sont pas mis en évidence

- on suppose que le plus petit carré mesure 2cm de côté, donc 4cm² d'aire
pour connaître le côté du carré supérieur, je pose l'équation $x^2 - 4 = 4\text{cm}^2$
où x est égal au côté du carré supérieur et 4cm² est égal à l'aire de ce même carré :

$$x^2 - 4 = 4\text{cm}^2$$

$$x^2 = 4 + 4$$

$$= 8$$

$$x = \sqrt{8}\text{cm}$$

→ le deuxième plus petit carré a
un côté égal à $\sqrt{8}\text{cm}$.

- pour connaître le côté du carré suivant j'utilise la même méthode en soustrayant à l'aire de ce carré la somme des deux aires des plus petits carrés :

$$x^2 - 8 = 4\text{cm}^2$$

$$x^2 = 8 + 4$$

$$= 12$$

$$x = \sqrt{12}\text{cm}$$

→ le troisième plus petit carré
a un côté égal à $\sqrt{12}\text{cm}$

- pour le carré suivant j'utilise toujours la même méthode mais avec la somme des trois carrés cette fois :

$$x^2 - 12 = 4\text{cm}^2$$

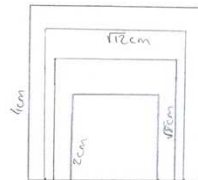
$$x^2 = 12 + 4$$

$$= 16$$

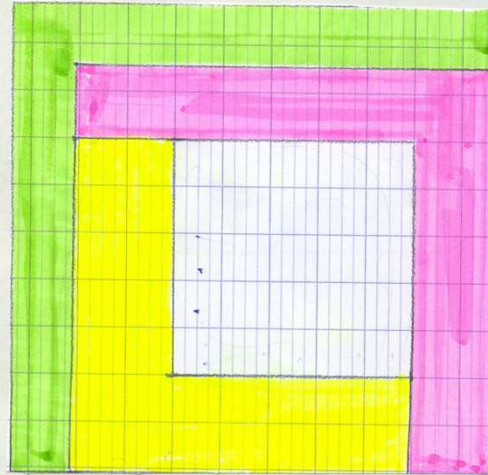
$$x = \sqrt{16}$$

$$= 4\text{cm}$$

→ le dernier carré, le plus grand
a un côté égal à $\sqrt{16}\text{cm}$
4cm



Une nouvelle disposition des carrés



Grâce aux calculs L'aire du carré blanc est de 16 cm^2

Pour que l'aire du carré jaune fasse 16 cm^2 , on additionne l'aire du carré blanc à 16 cm^2 . Puis on fait: $\sqrt{32} = 5,66$. Ceci est le côté du carré jaune.

Pour l'aire du carré rose on fait: $32 + 16 = 48$. $\sqrt{48} = 6,93$. C'est son côté.

Pour l'aire du carré vert on fait: $48 + 16 = 64$. $\sqrt{64} = 8$. C'est son côté.

On est parti sur un carré de 9 cm^2 (c'est notre base)

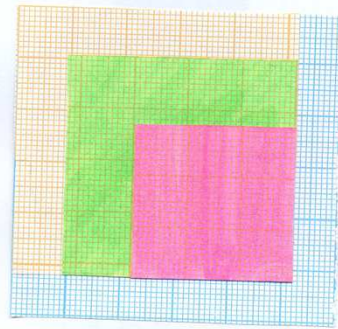
Pour que l'aire visible des différents carrés soit toujours de même longueur, on ajoute 9.

$$9 \text{ cm}^2 + 9 = 18 \text{ cm}^2 \quad (\text{donc un carré de } 4,25 \text{ cm de côté})$$

$$18 \text{ cm}^2 + 9 = 27 \text{ cm}^2 \quad (\text{donc un carré de } 5,2 \text{ cm de côté})$$

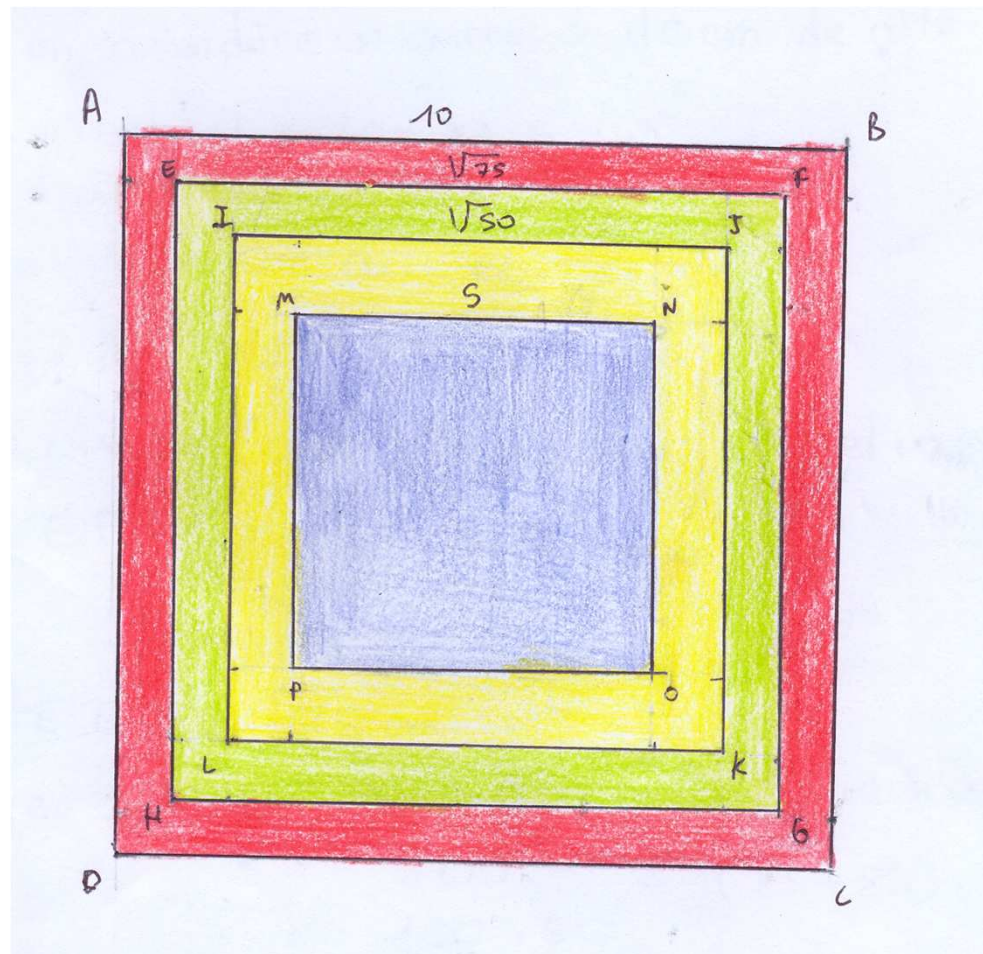
$$27 \text{ cm}^2 + 9 = 36 \text{ cm}^2 \quad (\text{donc un carré de } 6 \text{ cm de côté})$$

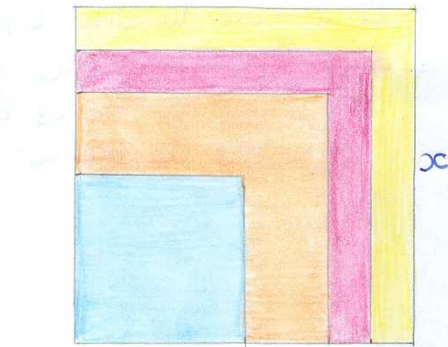
Notre carré de base fait 9 cm^2 , il a donc un côté de 3 cm de côté.



bleu $\rightarrow$ carré de 36 cm^2
orange $\rightarrow$ carré de 27 cm^2
vert $\rightarrow$ carré de 18 cm^2
rose $\rightarrow$ carré de 9 cm^2

Les valeurs des côtés sont issues de la racine carrée de l'aire de leur carré ($4,25 \text{ cm} = \sqrt{18 \text{ cm}^2}$).





C_1 ←→

C_2 ←→

C_3 ←→

C_4 ←→

On a $x = 8$

Etant donné qu'il y a 4 carrés d'aires égales à $\frac{1}{4}$ de l'aire du carré C_1 . On en déduit que l'aire du carré C_1 est de 64 (8^2)

l'aire du carré C_2 est égale à $\frac{3}{4} \times 8^2 = 48$
 l'aire du carré C_3 est égale à $\frac{42}{4} \times 8^2 = 32$
 l'aire du carré C_4 est égale à $\frac{14}{4} \times 8^2 = 16$

Sachant que: quand on multiplie ou divise une longueur par un coefficient k , alors on multiplie ou divise l'aire par coefficient k^2

On en déduit alors : - la longueur du carré $C_1 = 8\text{cm}$
 - la longueur du carré $C_2 = 7\text{cm}$
 - la longueur du carré $C_3 = 6\text{cm}$
 - la longueur du carré $C_4 = 4\text{cm}$

Choix d'une inconnue, sans succès

$$1^{\text{er}} = x$$

$$2^{\circ} = x \times 2 - x$$

$$3^{\circ} = x \times 3 - 2x$$

$$4^{\circ} = x \times 4 - 3x$$

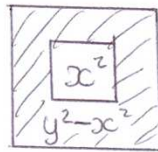
Fiche réponse du problème n° 9

$x =$ l'aire du premier carré,

Dans le côté de chaque carré est pour:

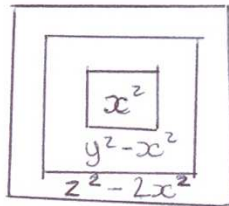
- le premier carré: $\sqrt{x}$
- le deuxième carré: $\sqrt{x \times 2}$
- le troisième carré: $\sqrt{x \times 3}$
- le quatrième carré: $\sqrt{x \times 4}$

Prenons 2 carrés d'aires x^2 et y^2



$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= x^2 \\ y^2 &= x^2 + x^2 \\ y^2 &= 2x^2 \end{aligned}$$

Pour 3 carrés:



$$\begin{aligned} z^2 - 2x^2 &= x^2 \\ z^2 &= x^2 + 2x^2 \\ z^2 &= 3x^2 \end{aligned}$$

Donc pour 4 carrés, l'aire du grand carré w : $w^2 = 4x^2$.

Donc le côté $w = 2x$.

4^e Aire 1^{er} carré: x^2

Aire 2^e carré: $2x^2$

Aire 3^e carré: $3x^2$

Aire 4^e carré: $4x^2$

Bon départ, mais une généralisation trop rapide

le plus petit carré est de côté a donc son aire est a^2
le deuxième carré est de côté b donc son aire est $b^2 - a^2$. Sachant
que l'aire du petit carré doit être égale à celle du deuxième carré:

$$b^2 - a^2 = a^2$$

$$b^2 = 2a^2$$

$$b = a\sqrt{2}$$

le rapport entre le premier et le deuxième carré doit toujours être
multiplié par $\sqrt{2}$

On fait la même démarche entre le deuxième et le troisième
carré, et pareil entre le troisième et le quatrième carré.

On construit un carré et pour construire le suivant, on prend sa
diagonale pour côté.

Mise en place d'un algorithme, sans mise en forme de la preuve

Nous avons essayé de construire un nouveau logo en prenant comme base un carré d'aire 4cm^2 (le rouge).

Nous avons remarqué que ce carré comportait 4 carrés d' 1cm de côté.

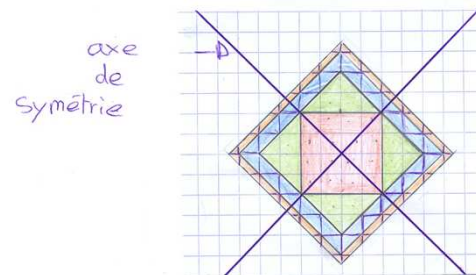
Nous avons donc décomposé ces carrés en deux par la diagonale, et nous avons construit un carré autour du carré de base avec comme forme de triangle, ce qui nous donne le carré vert.

Autour du carré, nous avons retranché par deux ces triangles pour ainsi nous réduire l'unité d'un demi carré.

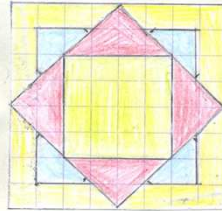
Ce carré bleu a donc la même aire que le carré vert et rouge.

Pour le dernier carré, nous avons tracé $0,25\text{cm}$; c'est-à-dire la moitié de la moitié de la dernière aire trouvée.

Pour démontrer, nous pouvons tracer les axes de symétrie (en violet).



Non respect de la consigne



Tout d'abord on construit un carré de côté 2 ce qui fait une aire de 4 cm^2 . Ensuite on divise le carré en 4 triangle d'aire 1 cm^2 on multiplie par 4 ce qui donne 4 cm^2 . Ensuite on trace le grand carré, jaune on trouve en additionnant les 4 triangle une aire de 8 cm^2 . Enfin on divise cette aire par 2 ce qui fait pour le carré jaune et bleu une aire de 4 cm^2 .

Un outil disponible pour tout problème? Ou une étiquette....

Tableau de proportionnalité

Valeur de x	$x 1$	$x 2$	$x 3$	$x 4$
$C \times C$	$\sqrt{16}^2$	$\sqrt{12}^2$	$\sqrt{8}^2$	$\sqrt{4}^2$

$$x 1 - 4 = x 2$$

$$x 2 - 4 = x 3$$

$$x 3 - 4 = x 4$$

$$x 4 = 4$$

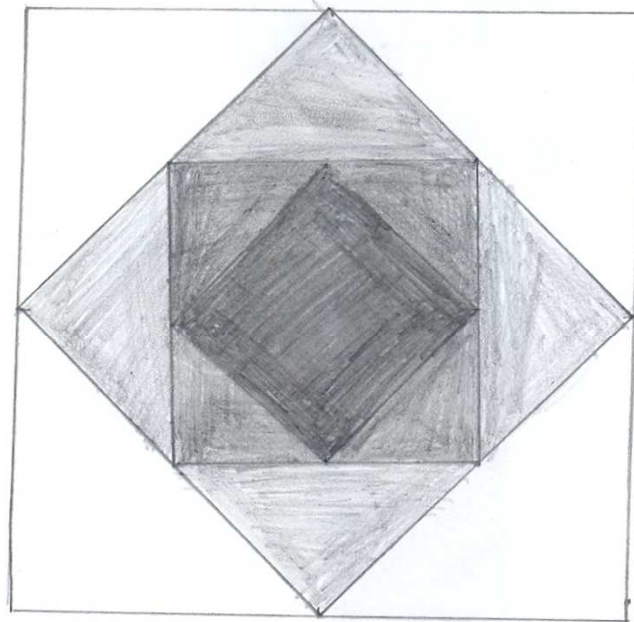
* différences entre les surfaces..

Nous sommes partie avec longueur = 2
et largeur = 2. $C \times C = 2 \times 2 = 4$

Nous sommes partie sur l'idée du sujet
que les ~~carrés~~* étaient proportionnelle entre
eux, mais de taille différente.

Nous avons donc enlevé 4 à chaque surface
des carrés.

Une bonne idée, mais quelle est la consigne?

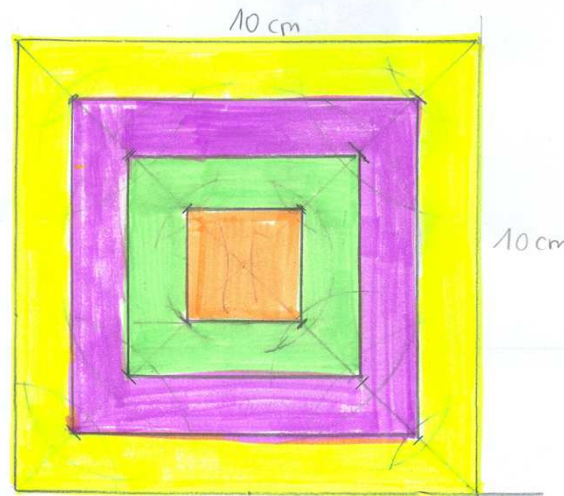


Un logo, mais quelle est la consigne?

- On cherche des carrés parfaits; (une suite).

Ca n'a pas marché.

- En partant d'un carré de côté de 10 cm, on trace ses diagonales puis sur chaque moitié de diagonales, on trace le milieu à l'aide du compas, puis sur chaque nouveau segment obtenu on trace son milieu on relie les points correspondant. On obtient ainsi les quatre carrés.



D'autres études sont possibles

-Superposition de n carrés.

Un carré est donné par son dessin.

Superposez, sans débordement, n carrés de tailles et de couleurs différentes de façon que l'aire des surfaces laissées par chaque couleur soit la même.

-Superposition de n figures géométriques semblables sans débordement.

Cas d'un triangle

Cas d'un hexagone régulier.

Superposition de sept carrés

Un carré est donné par son dessin.

Superposez, sans débordement, sept carrés, de tailles et de couleurs différentes de façon que l'aire des surfaces laissées par chaque couleur soit la même.

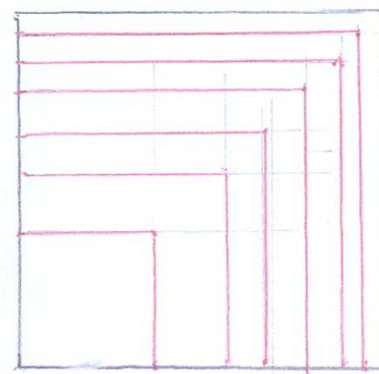
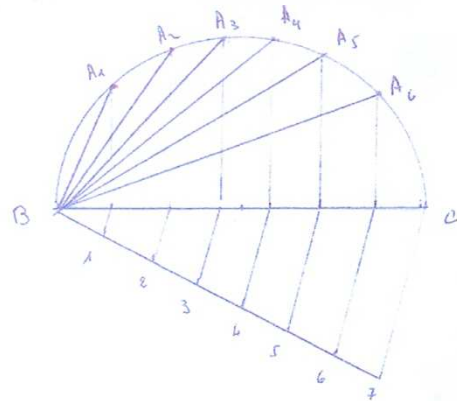
Eléments de solution

Soit a la longueur du côté du carré donné, C_i les carrés à construire et C_n le carré donné.

On démontre que : $\text{aire}(C_i) = \frac{i}{n} \times \text{aire}(C_n)$, soit $a_i = \sqrt{\frac{i}{n}} \times a$.

En utilisant une configuration de Thalès et une relation métrique dans le triangle rectangle, il est possible de construire des segments dont la longueur est celle des carrés cherchés.

Dessins pour $n = 7$



Superposition de cinq triangles

Un triangle est donné par son dessin.

Superposez, sans débordement, cinq triangles, de tailles et de couleurs différentes de façon que l'aire des surfaces laissées par chaque couleur soit la même.

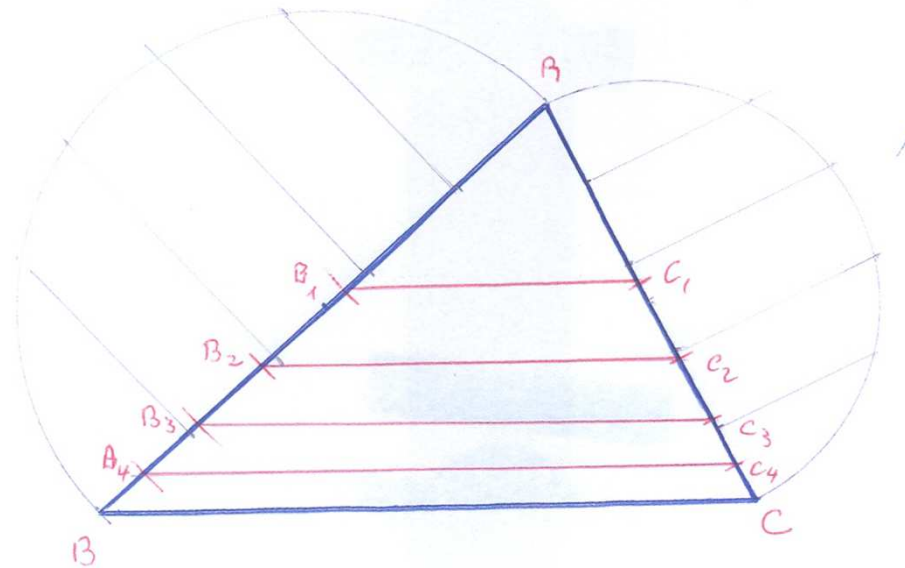
Cinq triangles superposés sans débordement

Soit T un triangle ABC donné par son dessin, T_i les triangles à construire et T_n le triangle donné.

La condition demandée se traduit par $\text{aire}(T_{i+1}) - \text{aire}(T_i) = \text{aire}(T_1)$ où encore $\text{aire}(T_{i+1}) - \text{aire}(T_i) = \frac{1}{n} \times \text{aire}(T)$, ce qui est équivalent à $\text{aire}(T_i) = \frac{i}{n} \times \text{aire}(T)$.

Les côtés du triangle T_i sont déduits des côtés du triangle T dans le rapport $\sqrt{\frac{i}{n}}$.

Dessins dans le cas $n = 5$.



Superposition d'hexagones réguliers

Un hexagone régulier est donné par son dessin.

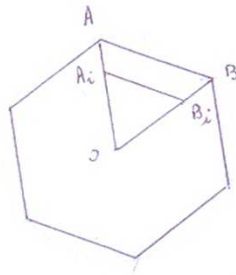
Superposez, sans débordement, n hexagones réguliers, de tailles et de couleurs différentes de façon que l'aire des surfaces laissées par chaque couleur soit la même.

Eléments de solution.

Soit H un hexagone régulier de centre O , dont le côté mesure a centimètres. Celui-ci est composé de six triangles isocèles de sommet O et de base l'un des côtés de l'hexagone. Soit n un entier naturel non nul, H_i , i variant entre 1 et n , les hexagones réguliers recherchés. H_n désignant l'hexagone donné.

Les n hexagones réguliers, de couleurs différentes, se superposent sans débordement de façon que l'aire des surfaces laissées par chaque couleur soit la même, se traduit par : pour tout i de 1 à n , $\text{aire}(H_{i+1}) - \text{aire}(H_i)$ est une constante λ égale à l'aire de H_1 ou encore $\frac{1}{n} \times \text{aire}(H)$.

On en déduit que : pour tout i entier de 1 à n , $\text{aire}(H_i) = \frac{i}{n} \times \text{aire}(H)$.



Le problème revient à superposer n triangles OA_iB_i sur le triangle OAB tel que $A_i \in [OA]$, $B_i \in [OB]$ et $(A_iB_i) \parallel (AB)$, i entier compris entre 1 et n .

La connaissance des triangles OA_iB_i suffit à déterminer les hexagones H_i .

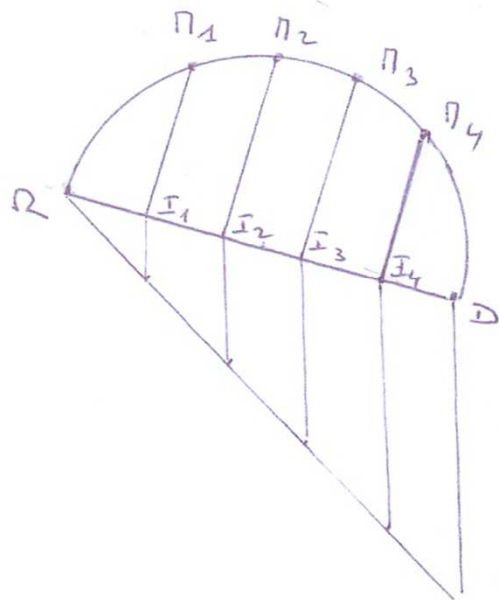
$Aire(H_i) = 6 \times aire(OA_iB_i)$, $aire(H_i) = \frac{i}{n} \times aire(H)$ se traduit par

$aire(OA_iB_i) = \frac{i}{n} \times aire(OAB)$. Soit $a_i = A_iB_i$ et $h_i = OH_i$, hauteur du triangle $O_iA_iB_i$.

Posons $OH = h$ hauteur du triangle OAB , la connaissance de a_i permet de connaître h_i dans le

triangle OA_iB_i , $a_i = \sqrt{\frac{i}{n}} \times a$ et $h_i = \sqrt{\frac{i}{n}} \times h$. La connaissance de A_i permet le tracé de

l'hexagone H_i . Le point A_i est sur le segment $[OA]$ tel que $OA_i = \sqrt{\frac{i}{n}} \times a$.



Pour construire un segment de longueur $\sqrt{\frac{i}{n}} \times a$,
 utilisons la configuration du triangle $\Omega D M$
 rectangle en M , dans laquelle on a
 $\Omega M^2 = \Omega I \times \Omega D$ avec I projeté orthogonal de
 M sur $[\Omega D]$ et $\Omega D = a$. On divise le segment
 $[\Omega D]$ en n segments de même longueur et on
 place le point I sur $[\Omega D]$ tel que le segment ΩI a
 pour longueur $\frac{i}{n} a$.

Le segment ΩM a pour longueur $\sqrt{\frac{i}{n}} \times a$.

Dessin dans le cas $n=5$

