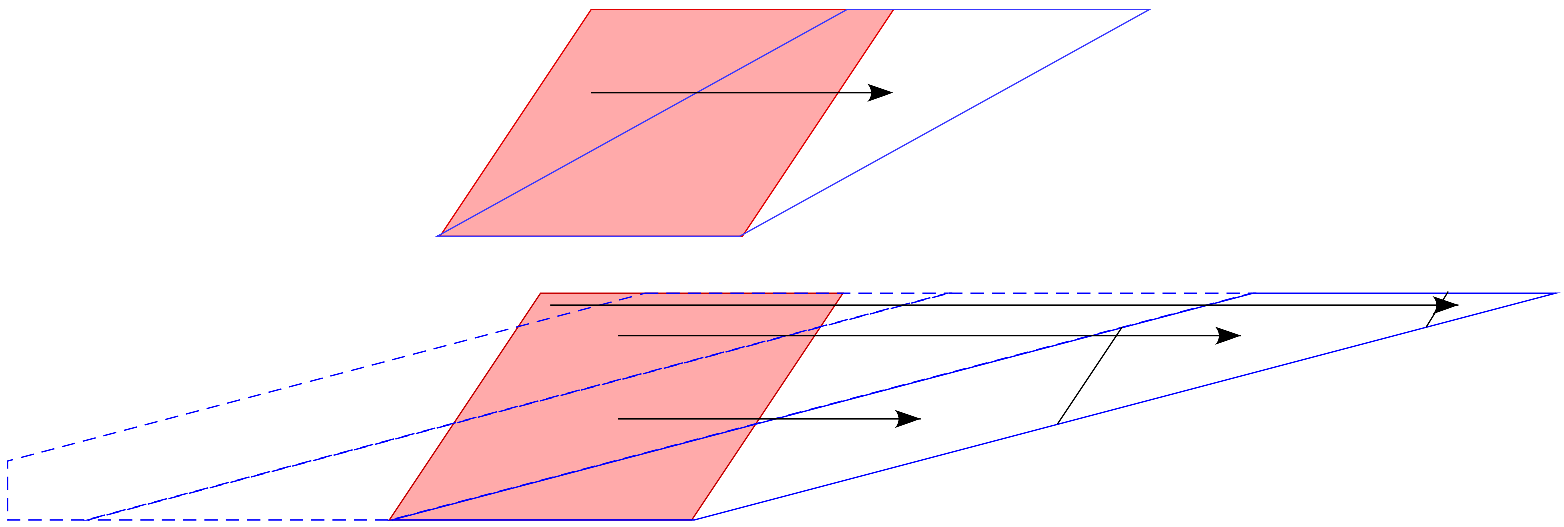
Introduction

La série de diapositives suivante a été présentée à la journée régionale de l’APMEP en juin 2007. Son but est de montrer que l’aire des figures planes est un outil extraordinaire de démonstration.

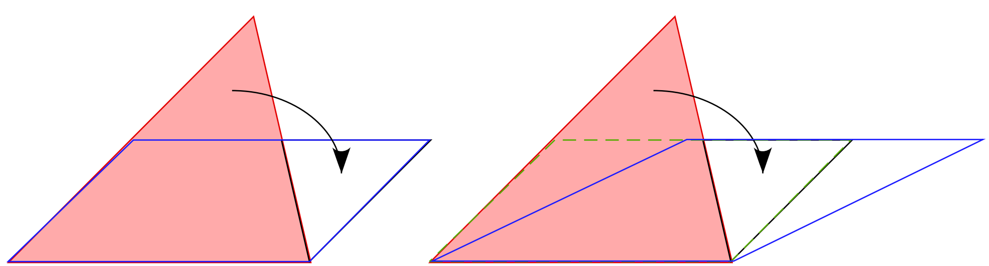
Le texte est réduit à sa plus simple expression. Ce sont les images qui ont une histoire à présenter. À chacun d’en comprendre le sens.

Aires et découpages

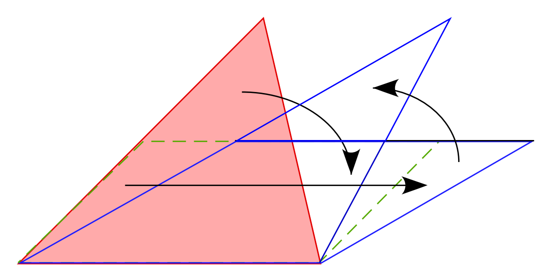
D’un parallélogramme à un parallélogramme de même base et même hauteur



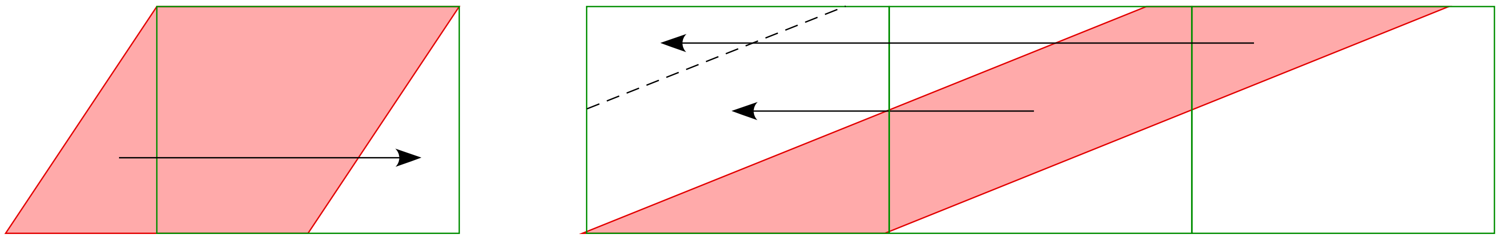
D’un triangle à un parallélogramme de même base et hauteur moitié



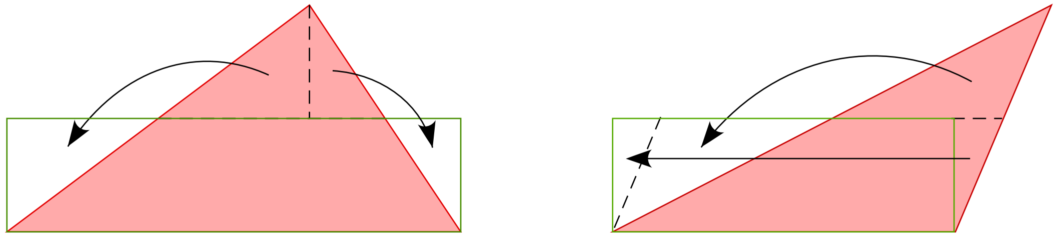
D’un triangle à un triangle de même base et même hauteur



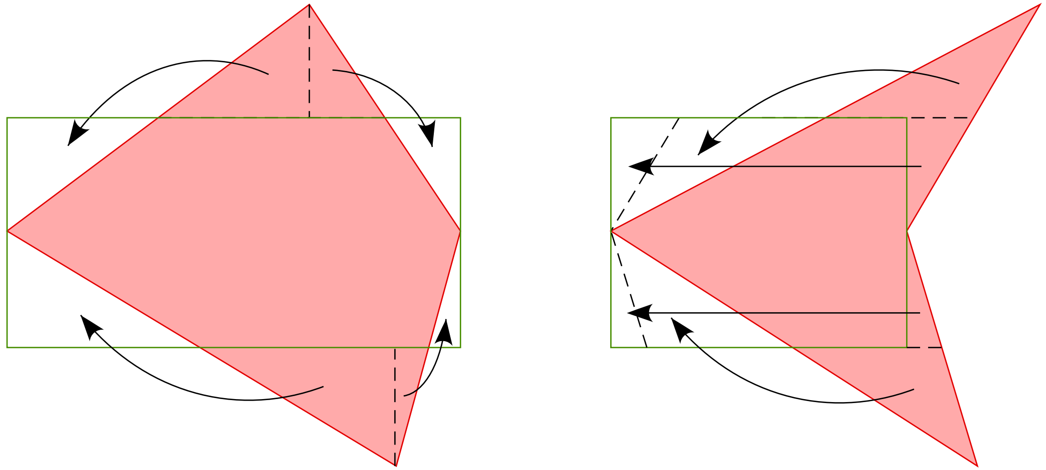
D’un parallélogramme à un rectangle de même base et même hauteur



D’un triangle à un rectangle de même base et hauteur moitié

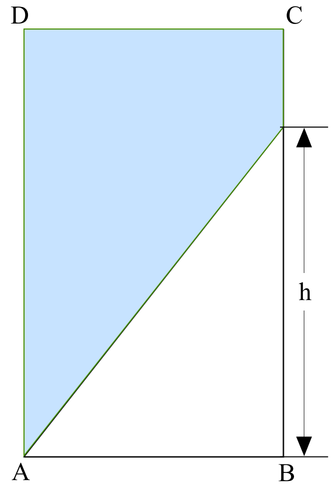


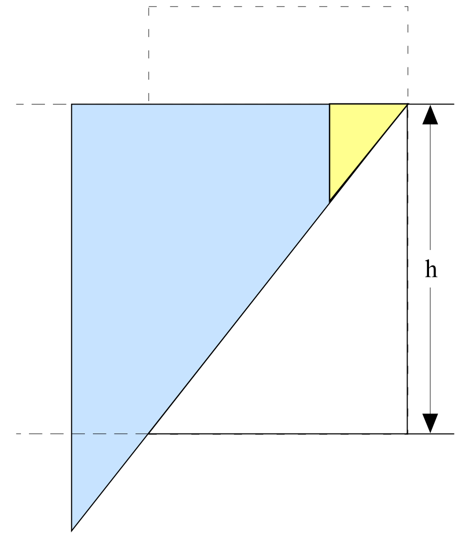
D’un quadrilatère à un rectangle de même base et hauteur moitié



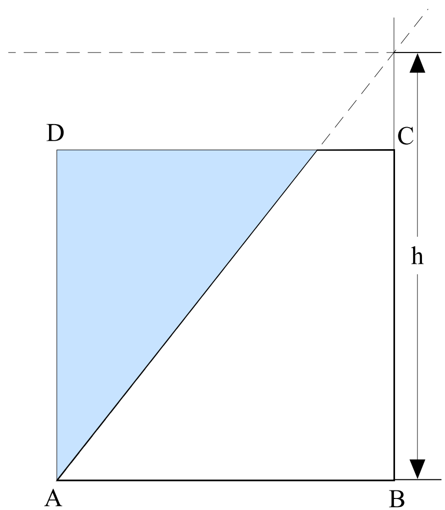
D'un rectangle à un rectangle de hauteur h donnée (BC/2 < h < 2BC)

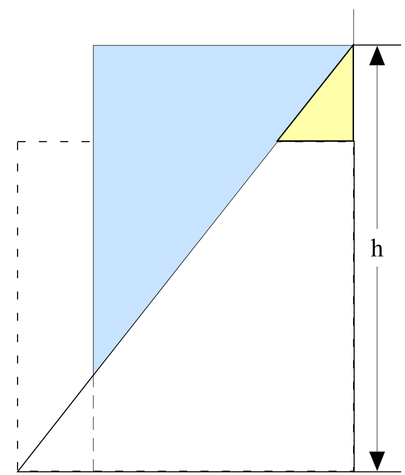
$$\frac{BC}{2} < h < BC$$



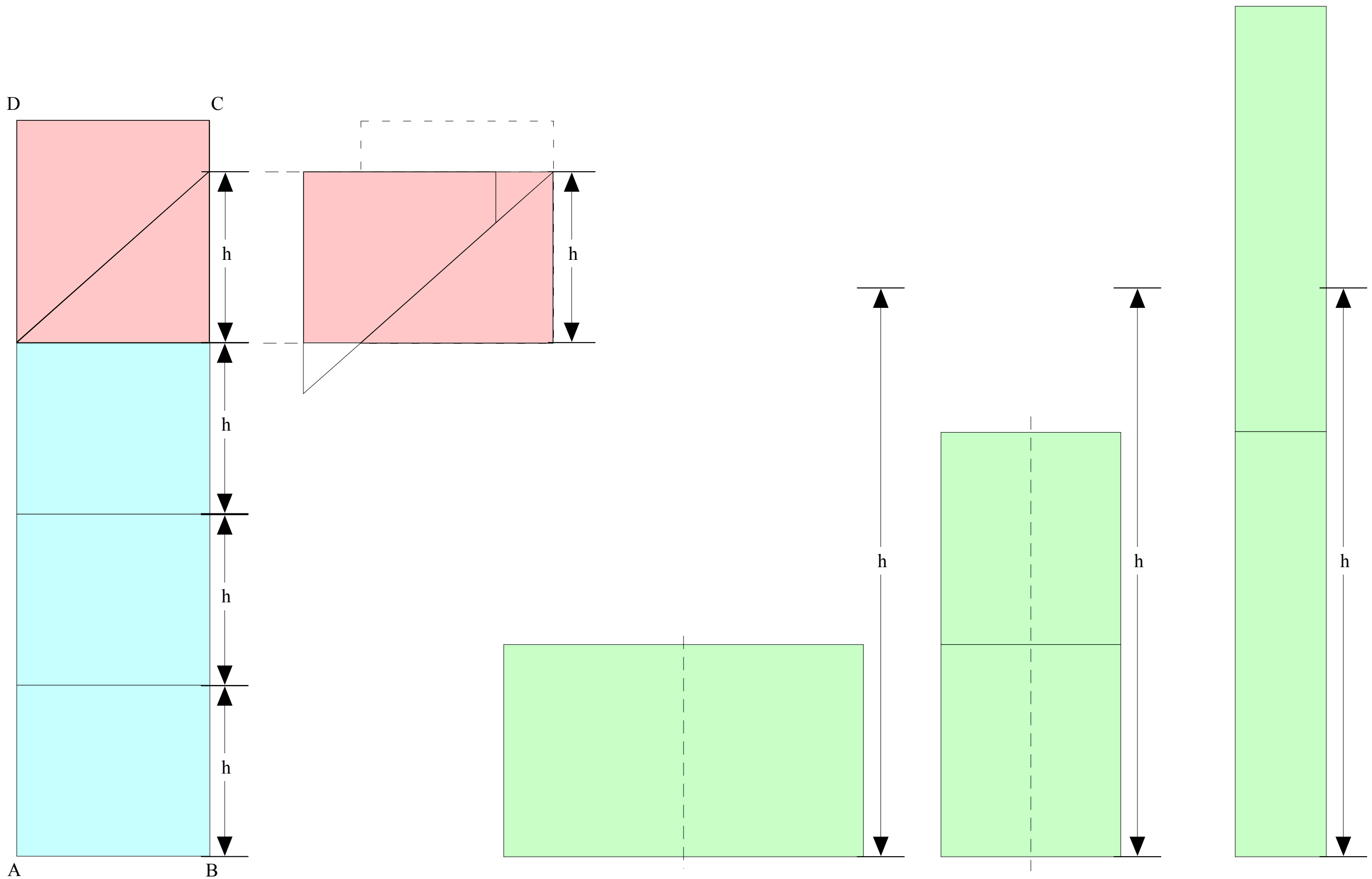


$$BC < h < 2 \cdot BC$$



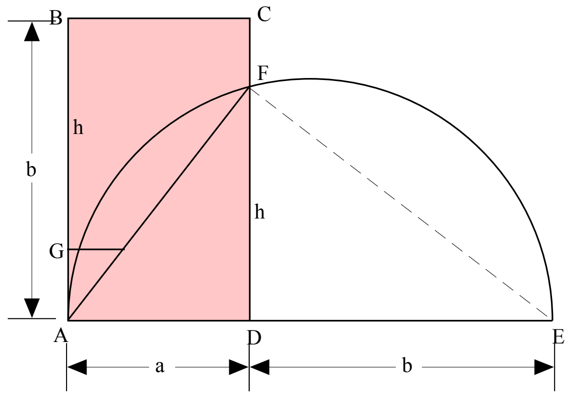


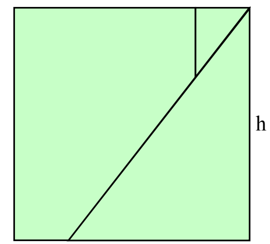
D’un rectangle à un rectangle de hauteur h donnée (cas général)

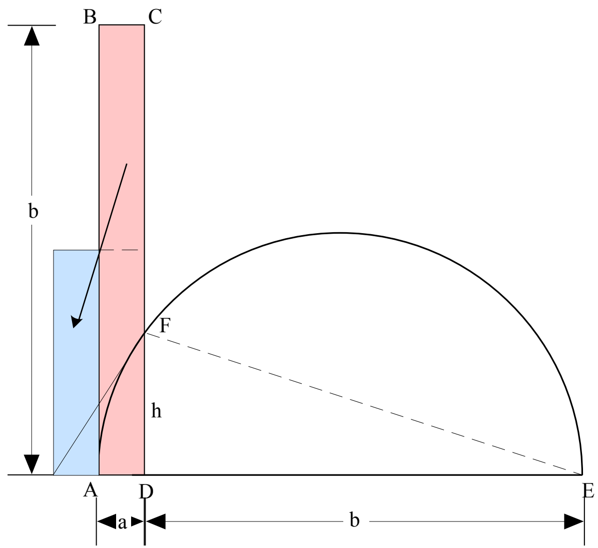


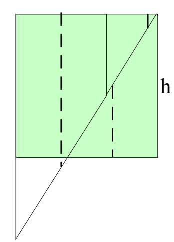
Deux moyens de se ramener au cas précédent

D’un rectangle à un carré

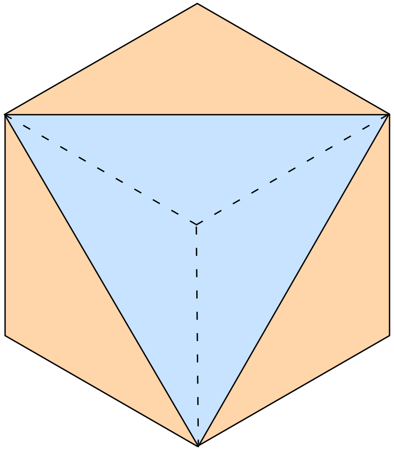




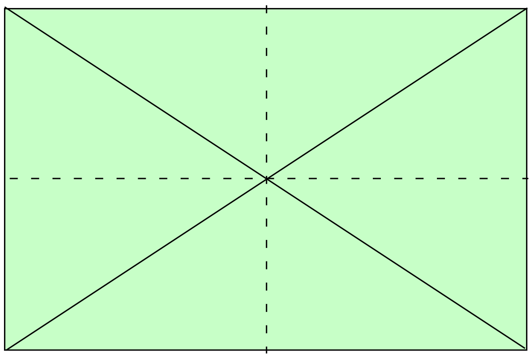




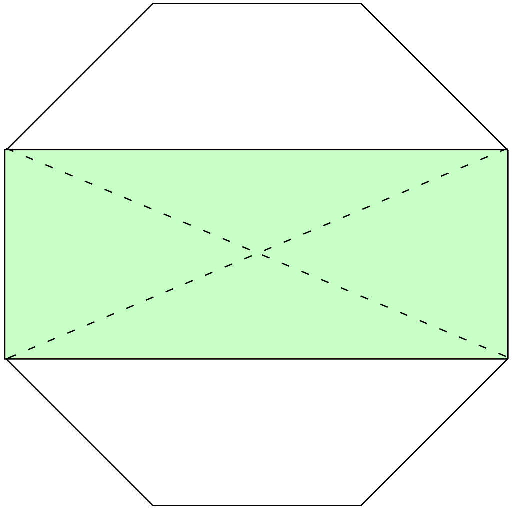
L'aire de l'hexagone régulier est double de celle d'un triangle équilatéral inscrit



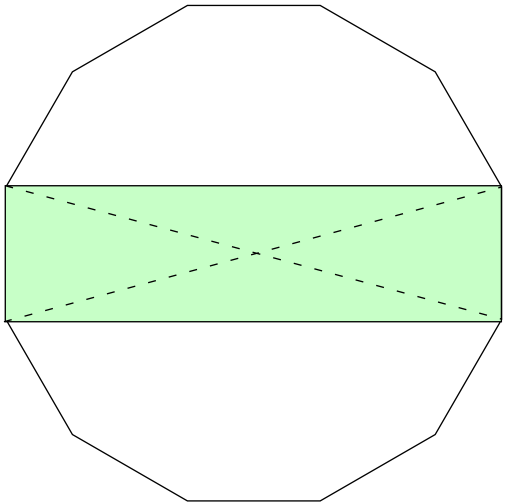
Les diagonales d'un rectangle le découpent en 4 triangles de même aire



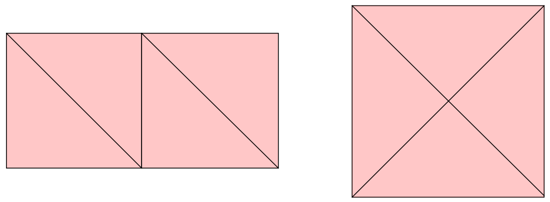
L'aire de l'octogone régulier est double de celle d'un rectangle inscrit



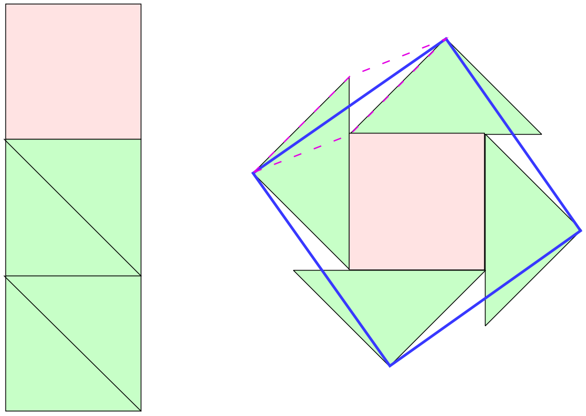
L'aire du dodécagone régulier est triple de celle d'un rectangle inscrit



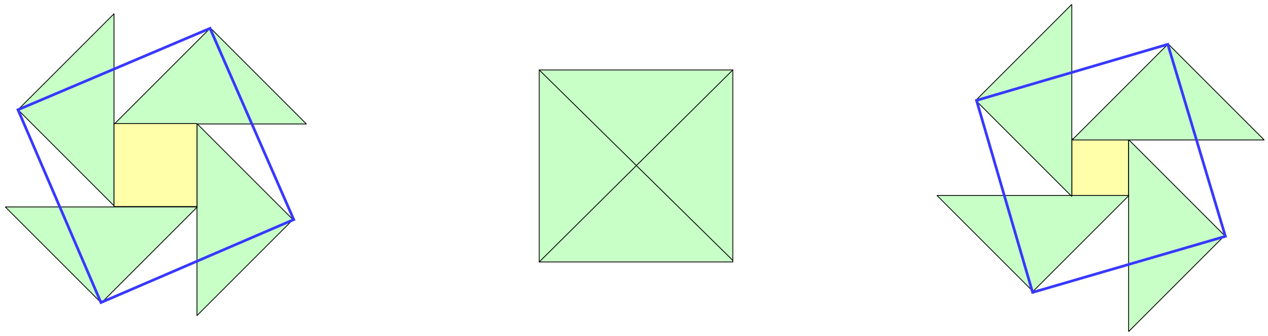
Faire un carré avec deux carrés de même taille



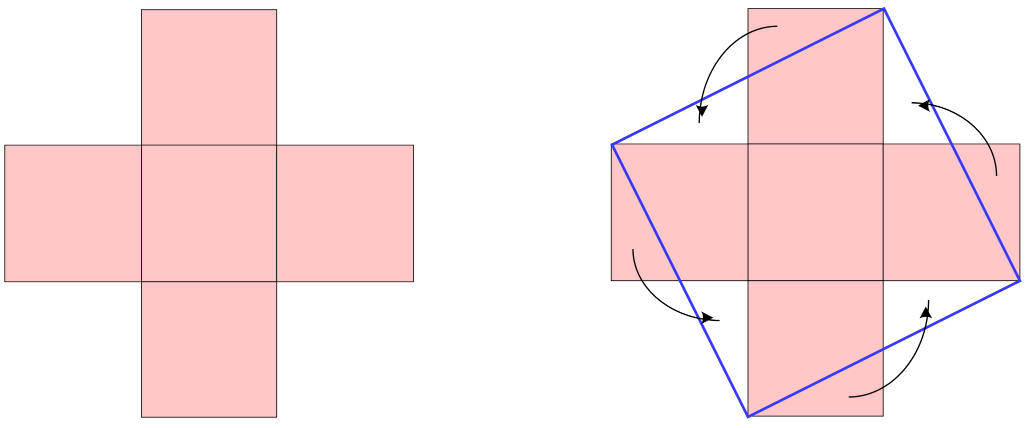
Faire un carré avec trois carrés de même taille



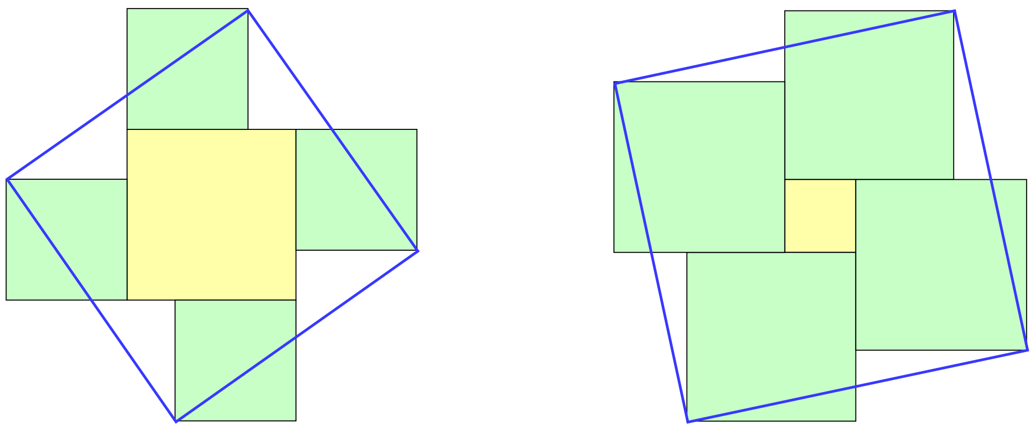
Faire un carré avec deux carrés de tailles différentes (solution 1)



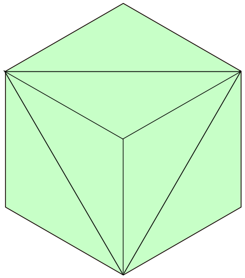
Faire un carré avec cinq carrés de même taille



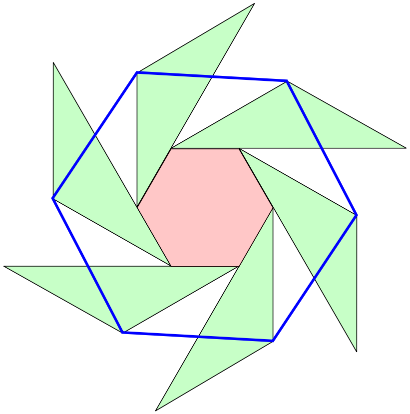
Faire un carré avec deux carrés de tailles différentes (solution 2)

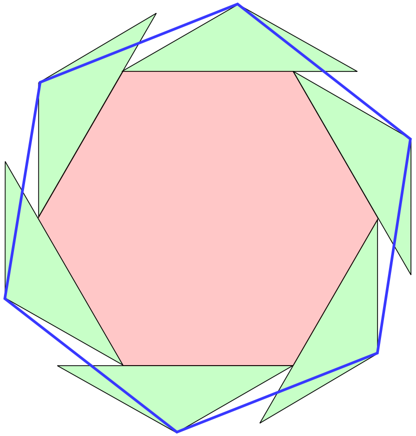


Découper un hexagone régulier en 6 triangles isocèles

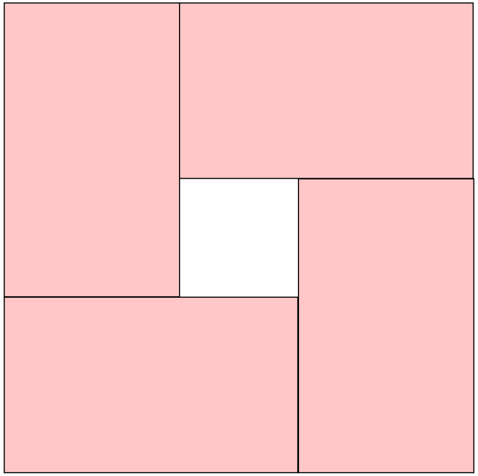


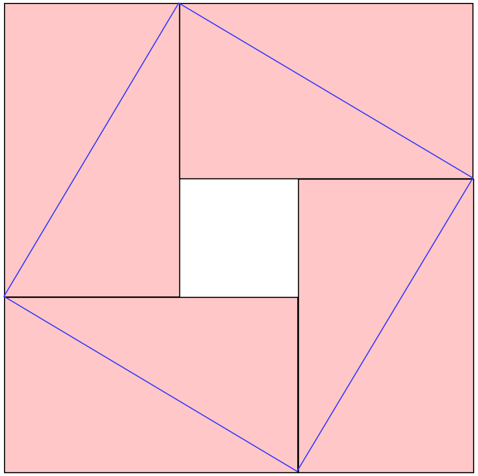
Faire un hexagone régulier avec deux hexagones réguliers



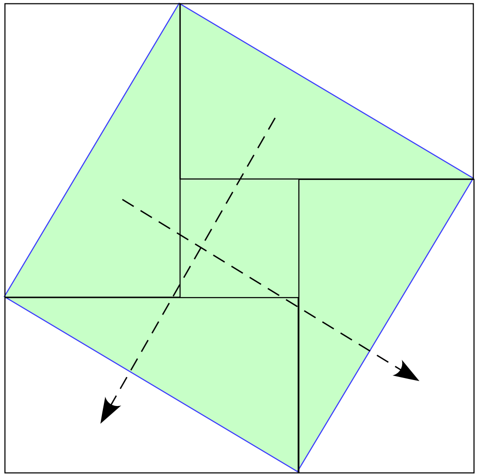


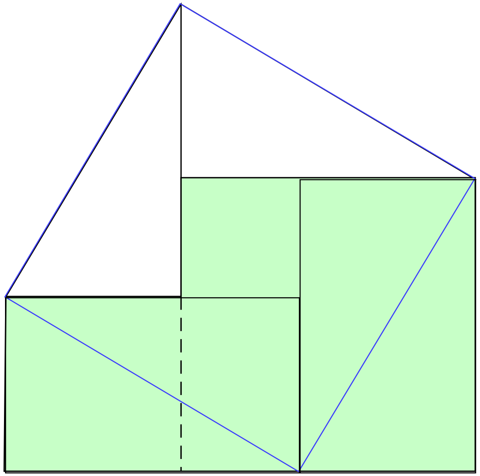
Carrés de la somme et de la différence des côtés d'un rectangle et de sa diagonale



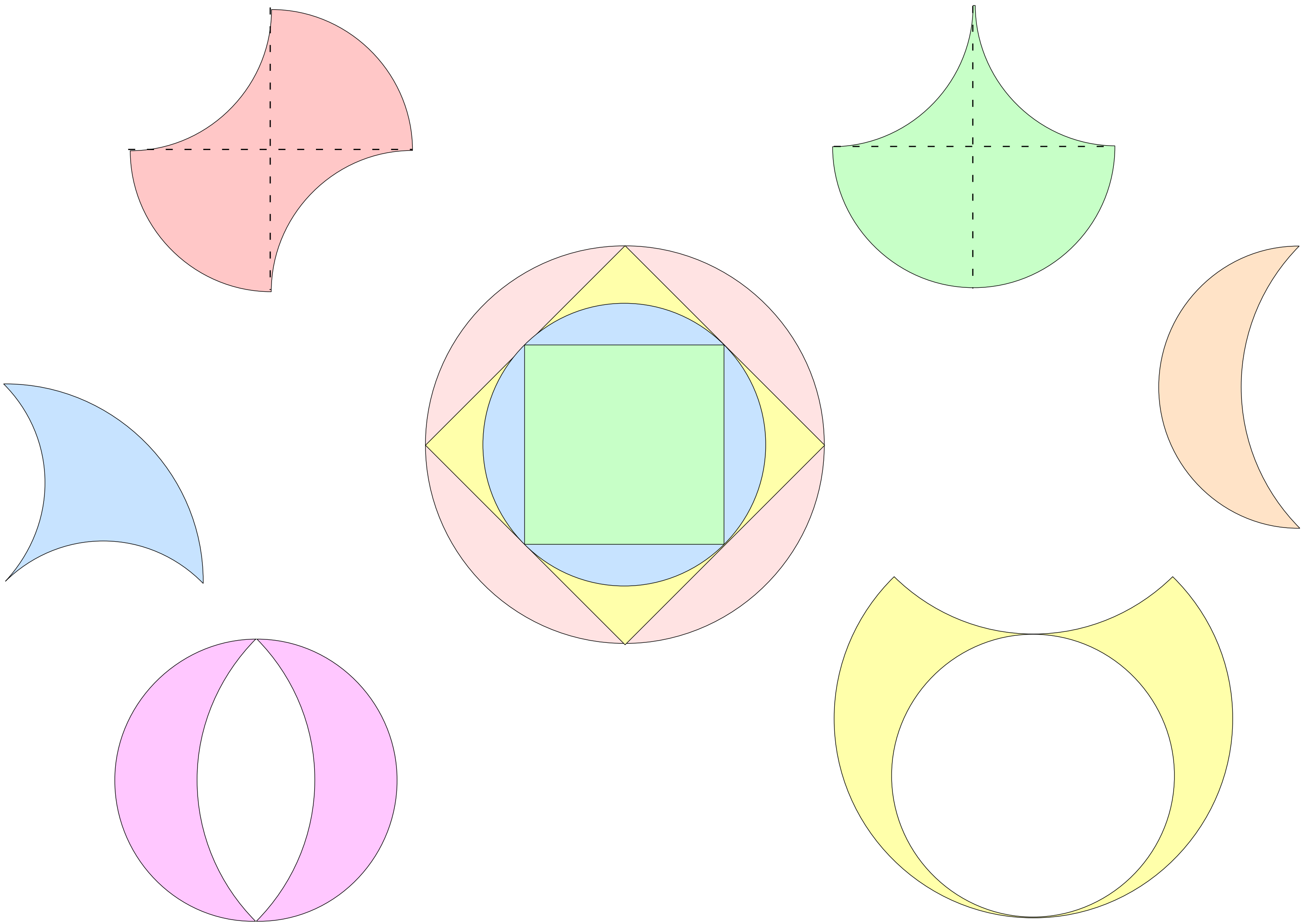


Le carré de la diagonale d'un rectangle est égal à la somme des carrés de ses côtés



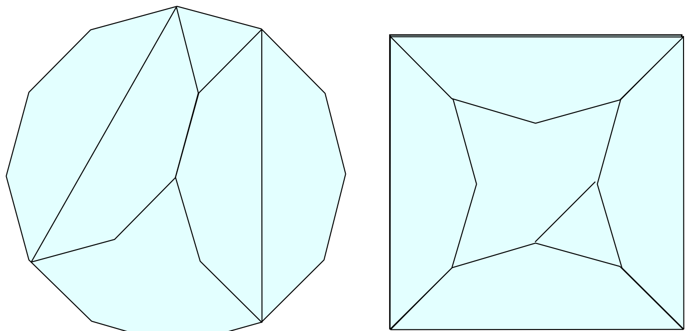


Quadratures de Léonard de Vinci

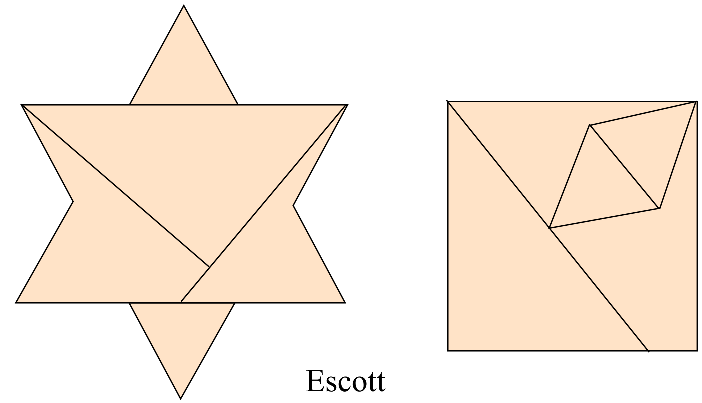


Problème : comparer les aires de ces figures curvilignes à celle du carré vert

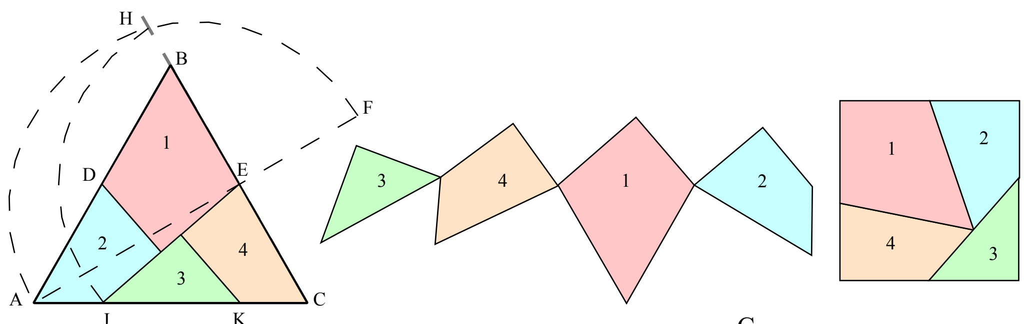
Découpages minimaux de polygones réguliers pour en faire des carrés



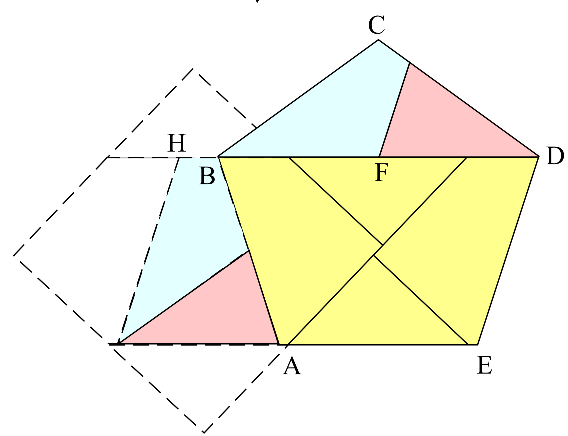
Lindgren



Escott

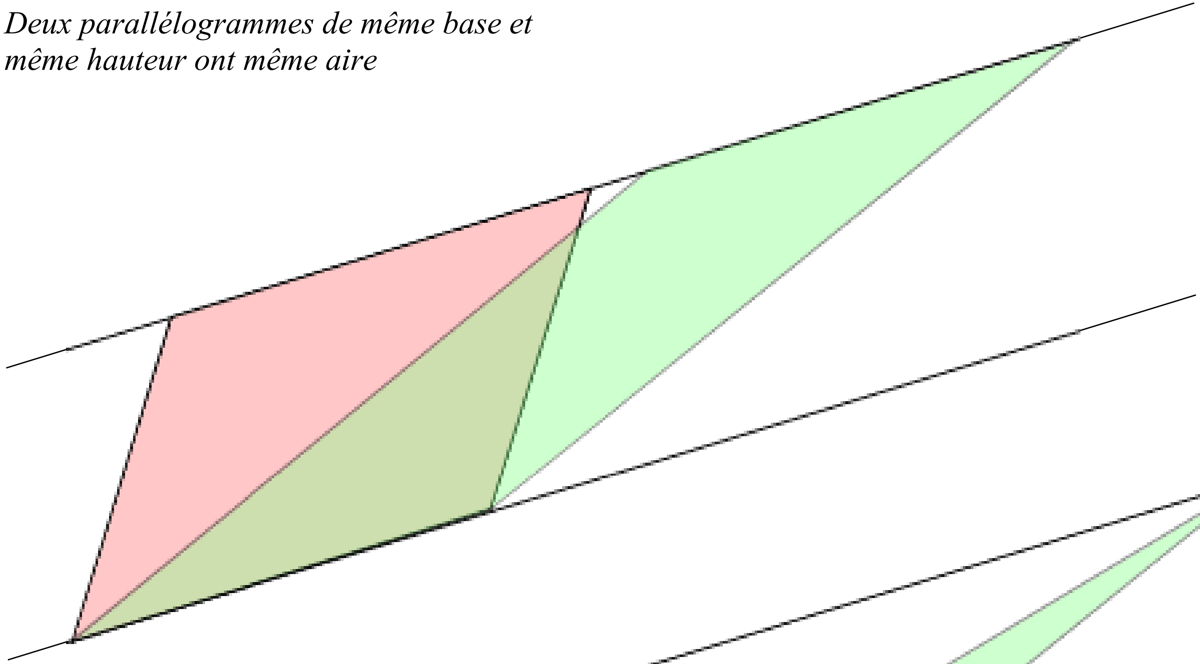


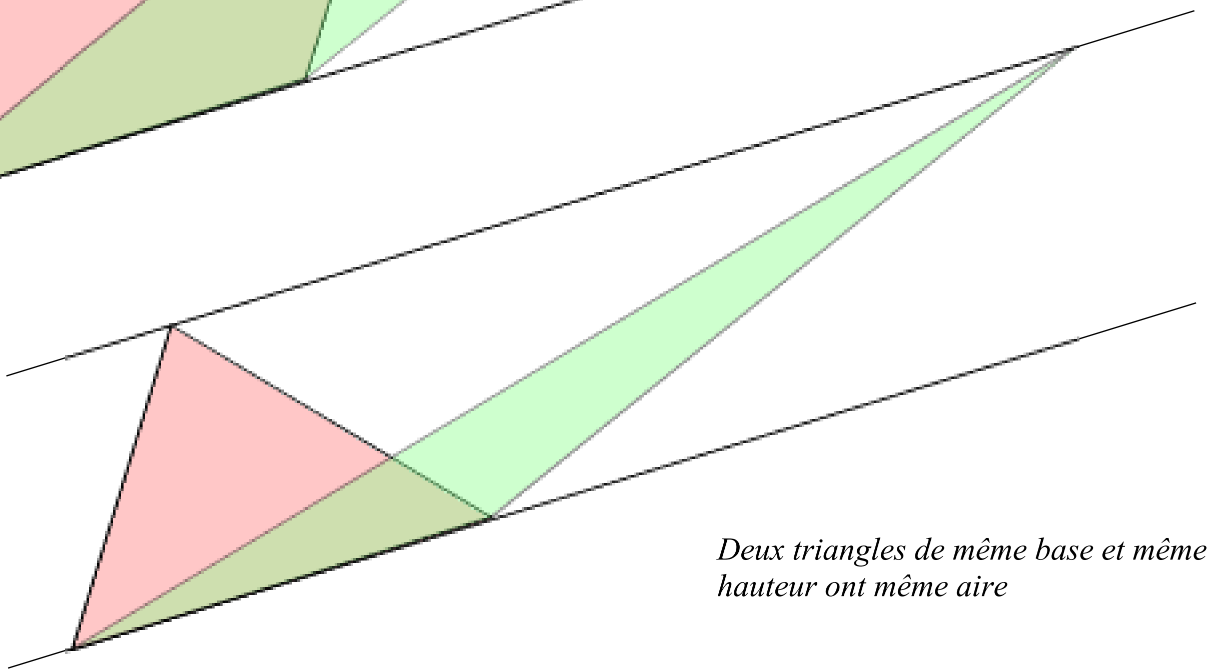
Duddeney



Aires et parallélogrammes

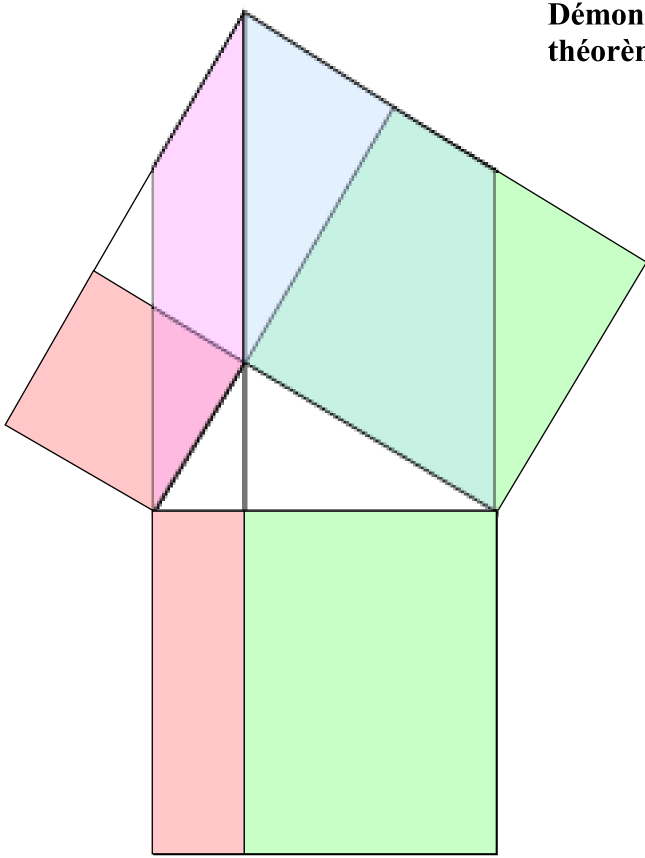
Deux parallélogrammes de même base et même hauteur ont même aire



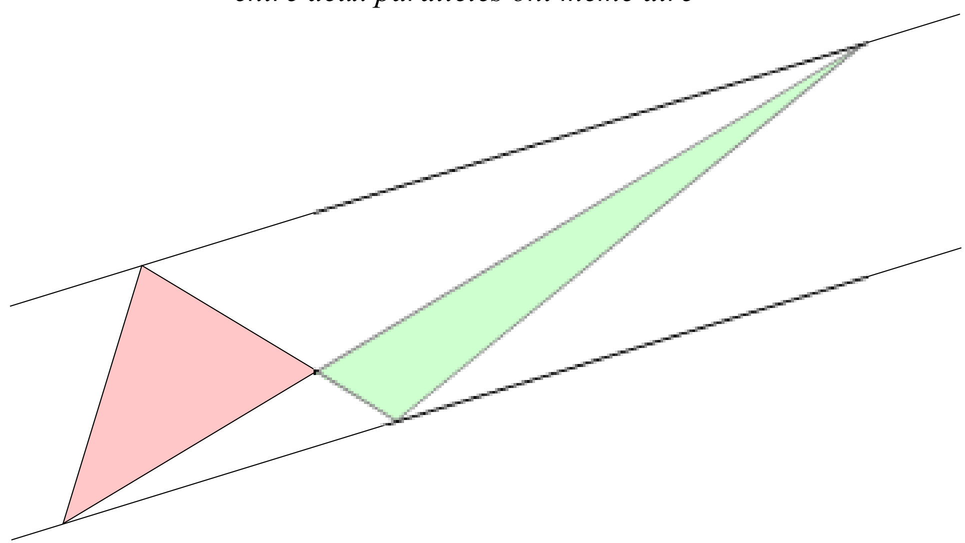


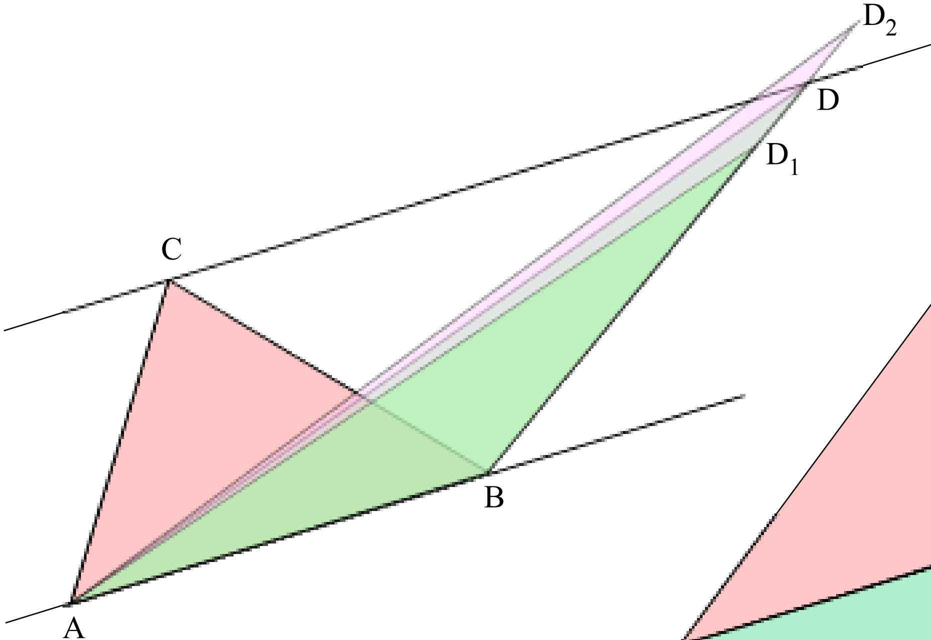
Deux triangles de même base et même hauteur ont même aire

Démonstration de Pappus pour le théorème de Pythagore

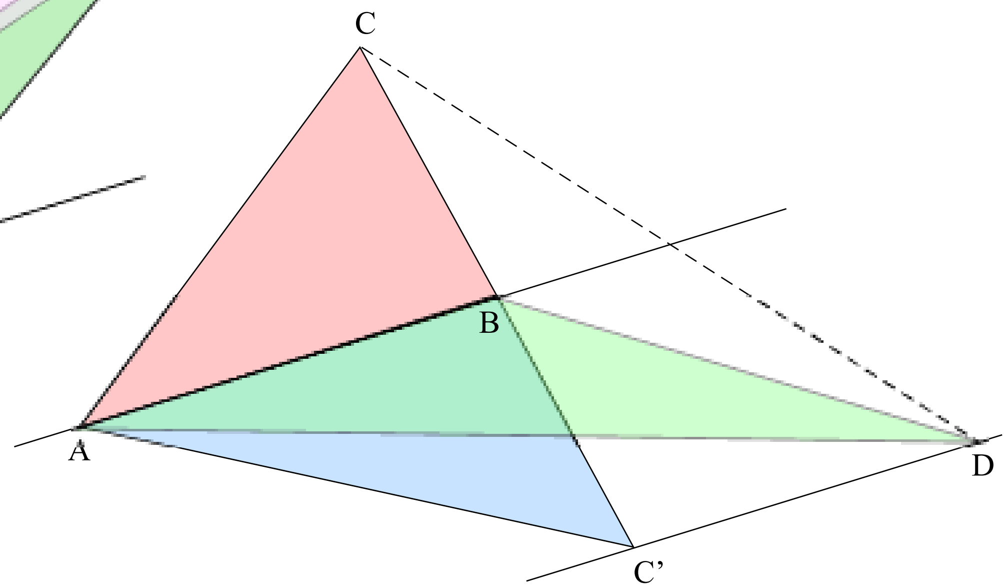


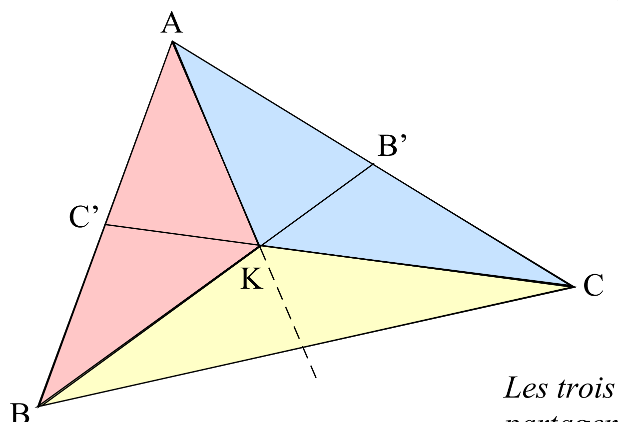
Le papillon : les deux triangles tendus entre deux parallèles ont même aire





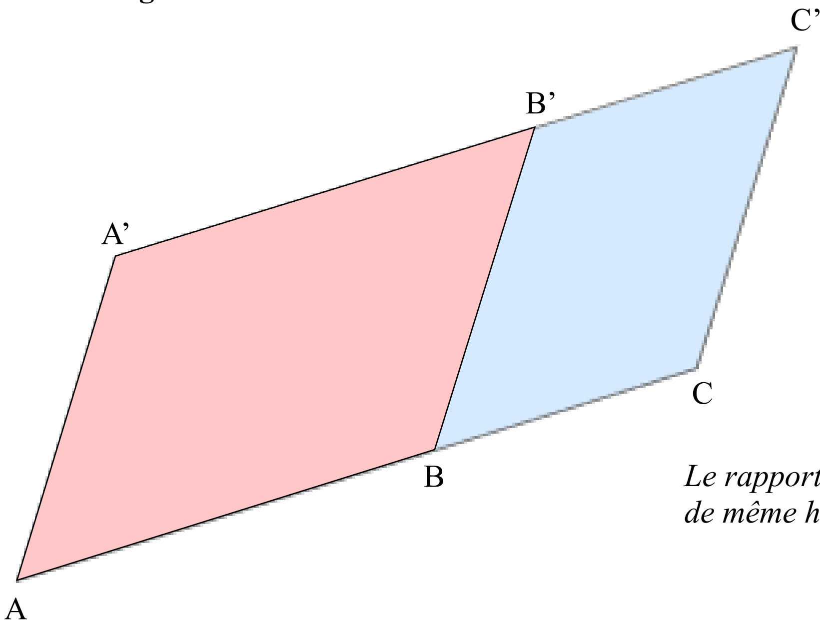
Deux triangles ABC et ABD de même base ont même aire si et seulement si C et D sont sur une parallèle à (AB) ou si (AB) coupe [CD] en son milieu





Les trois médianes d’un triangle le partagent en trois triangles de même aire

Parallélogrammes de même hauteur



$$\frac{\mathcal{A}(\text{ACC'A'})}{\mathcal{A}(\text{ABB'A'})} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}$$

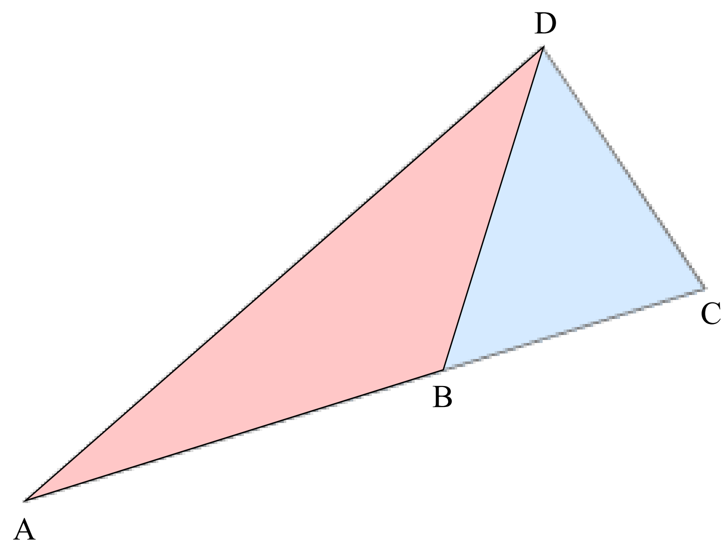
$$\frac{\mathcal{A}(\text{BCC'B'})}{\mathcal{A}(\text{ABB'A'})} = \frac{\text{BC}}{\text{AB}}$$

Le rapport des aires de deux parallélogrammes ou deux triangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases

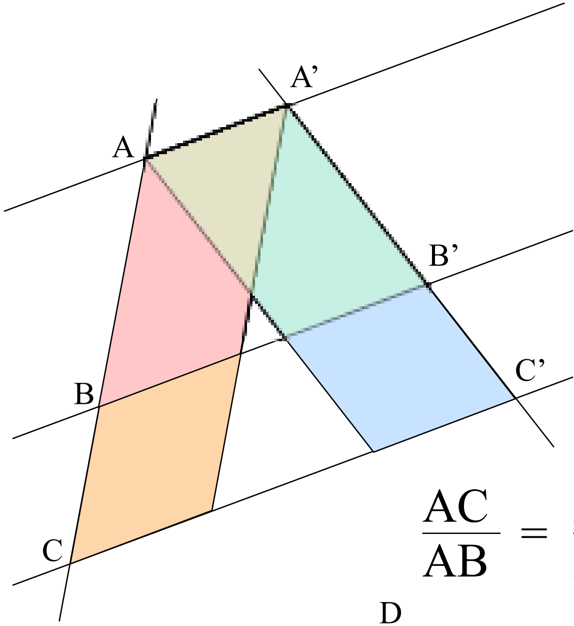
Triangles de même hauteur

$$\frac{\mathcal{A}(\text{ACD})}{\mathcal{A}(\text{ABD})} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}$$

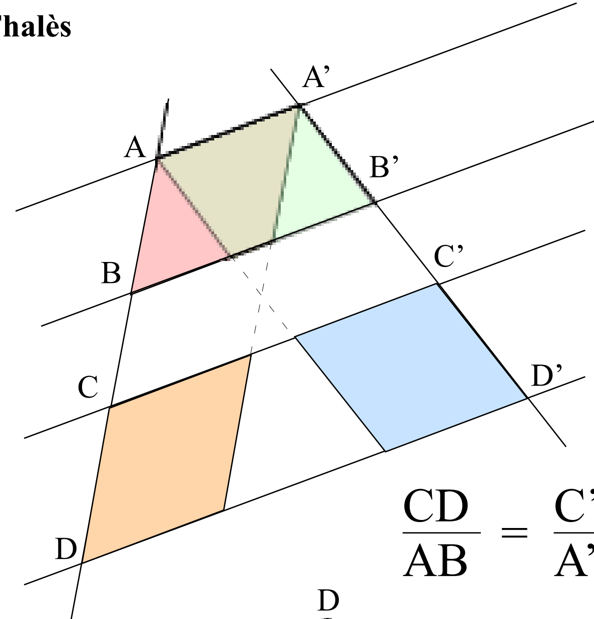
$$\frac{\mathcal{A}(\text{BCD})}{\mathcal{A}(\text{ABD})} = \frac{\text{BC}}{\text{AB}}$$



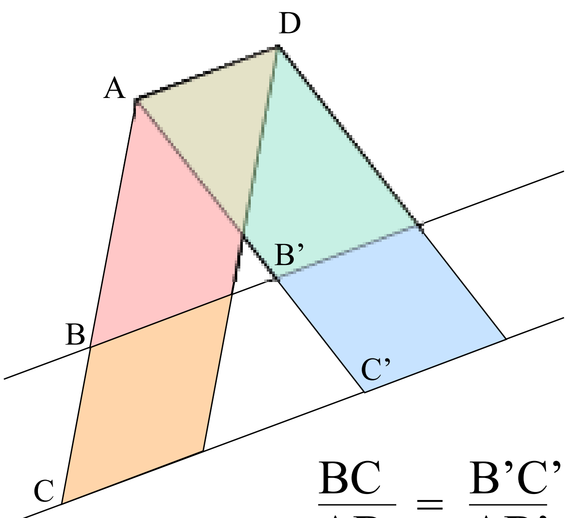
Théorème de Thalès



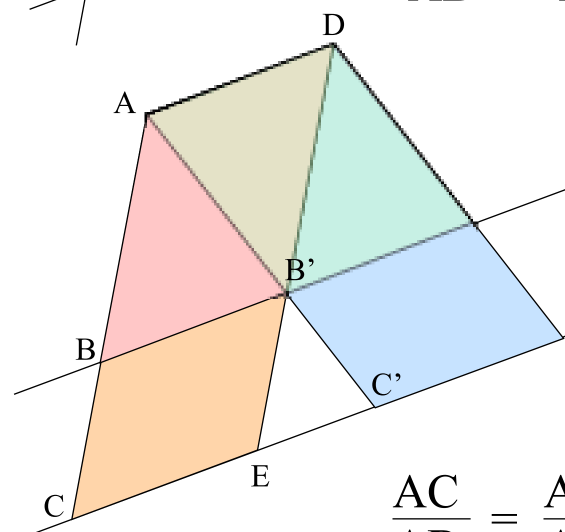
$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$



$$\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'}$$



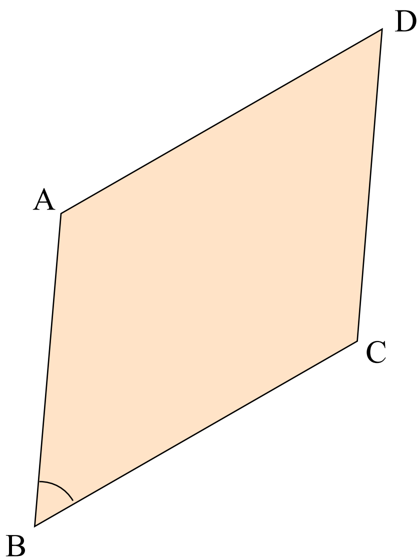
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

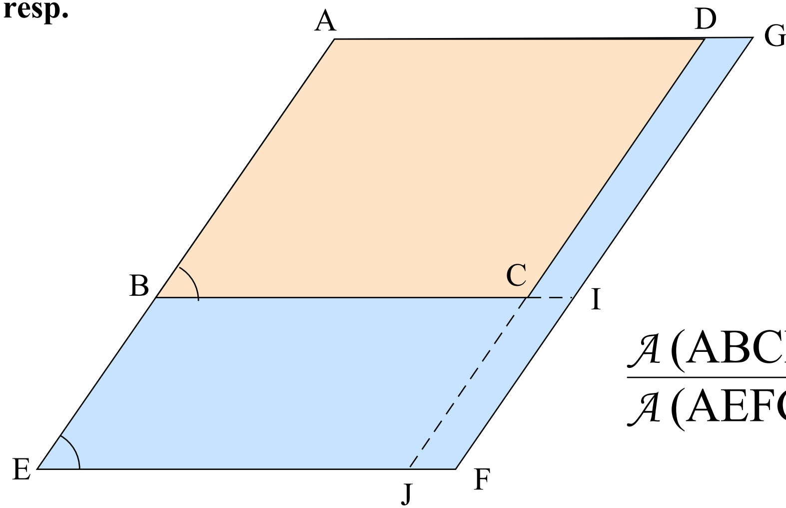


$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$$

Les aires verte et rose sont égales ainsi que les orange et bleue, sur chaque figure

Parallélogrammes ayant deux angles resp. égaux

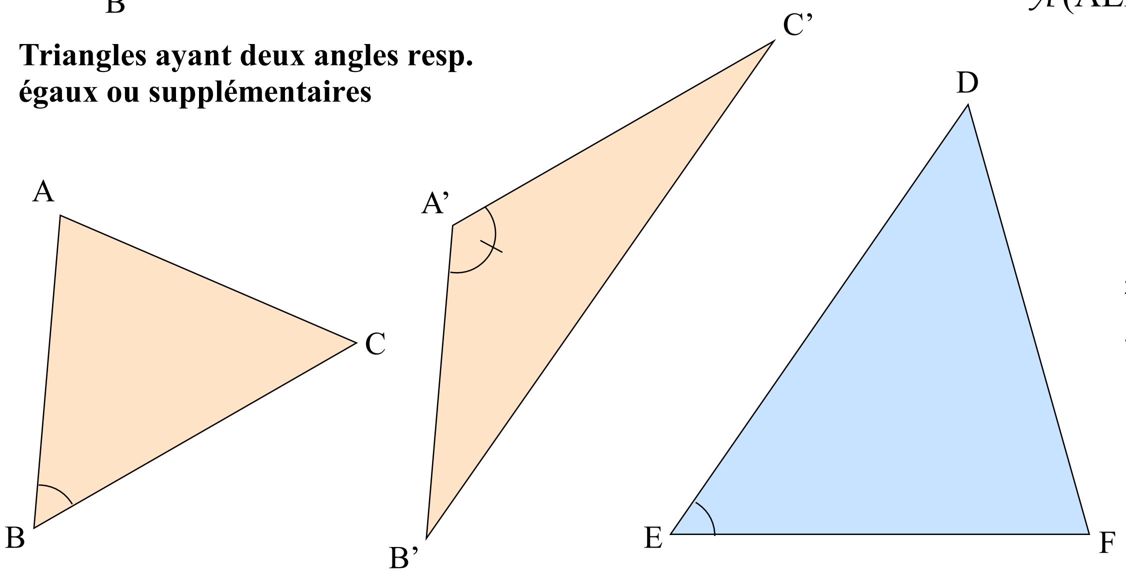




$$\frac{\mathcal{A}(\text{ABCD})}{\mathcal{A}(\text{AEFG})} = \frac{\text{AB}\cdot\text{AD}}{\text{AE}\cdot\text{AG}}$$

car $$\frac{\mathcal{A}(\text{ABCD})}{\mathcal{A}(\text{AEFG})} = \frac{\mathcal{A}(\text{ABCD})}{\mathcal{A}(\text{AEJD})}\cdot\frac{\mathcal{A}(\text{AEJD})}{\mathcal{A}(\text{AEFG})}$$

Triangles ayant deux angles resp. égaux ou supplémentaires

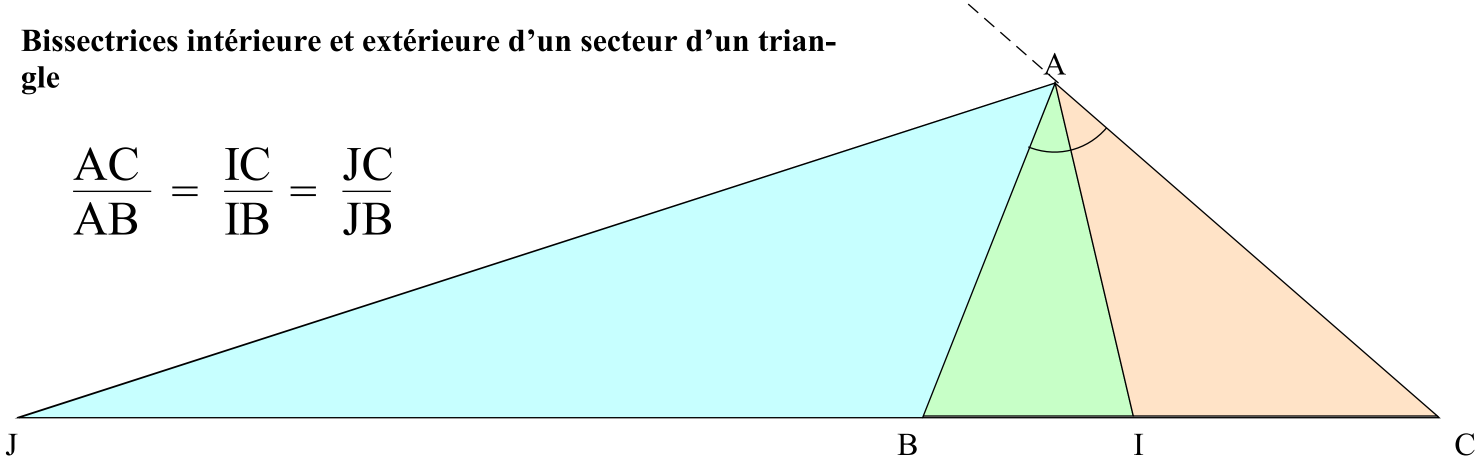


$$\frac{\mathcal{A}(\text{ABC})}{\mathcal{A}(\text{AEF})} = \frac{\text{BA}\cdot\text{BC}}{\text{EA}\cdot\text{EF}}$$

car ABC ou A'B'C' et DEF sont des moitiés de parallélogrammes ayant resp. deux angles égaux

Bissectrices intérieure et extérieure d'un secteur d'un triangle

$$\frac{AC}{AB} = \frac{IC}{IB} = \frac{JC}{JB}$$

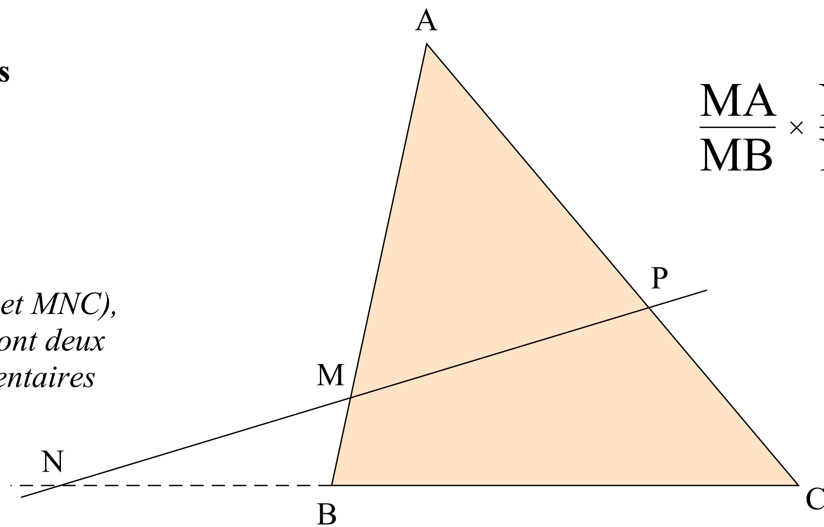


Les triangles ABI et ACI ont deux angles resp. égaux et ABJ ACJ resp. supplémentaires

Théorème de Menelaüs

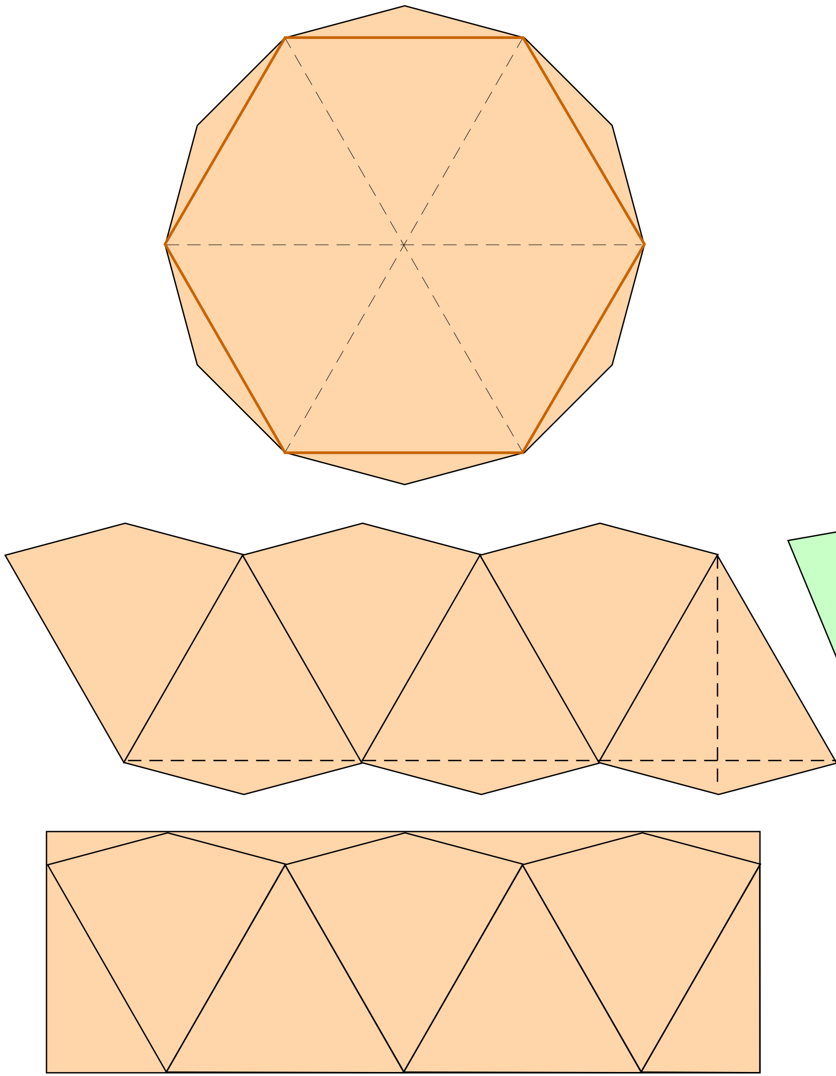
$$\frac{MA}{MB} \times \frac{NB}{NC} \times \frac{PC}{PA} = 1$$

Les couples de triangles (MBP et MNC), (MBP et NAP), (NAP et NMC) ont deux angles resp. égaux ou supplémentaires

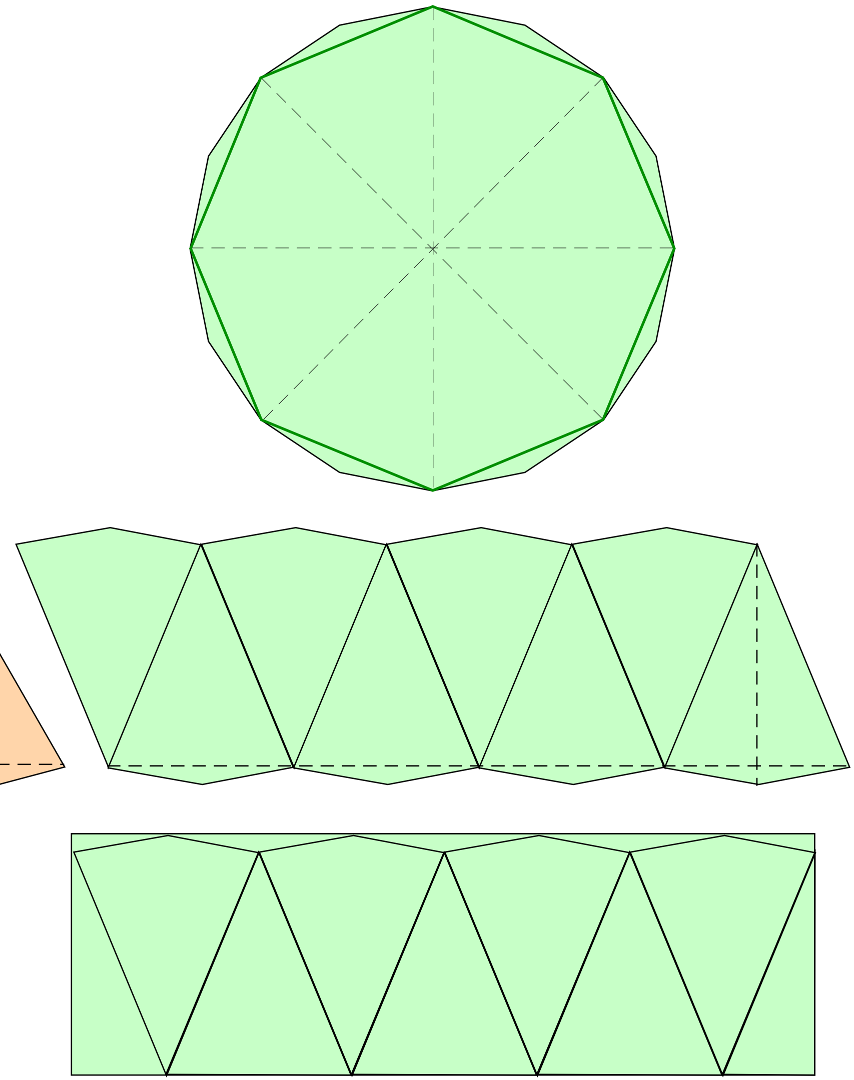


Aire des disques

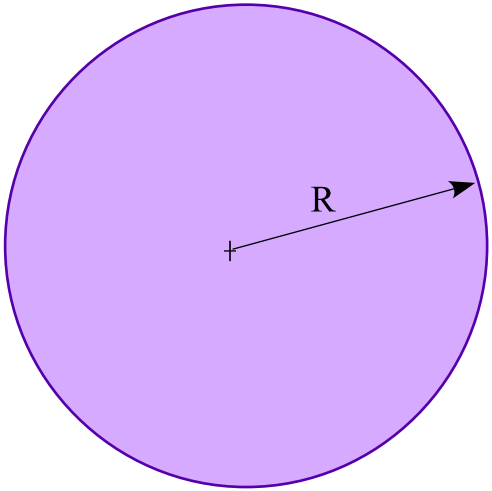
$$\mathcal{A}(P_{12}) = 3 \cdot R^2$$

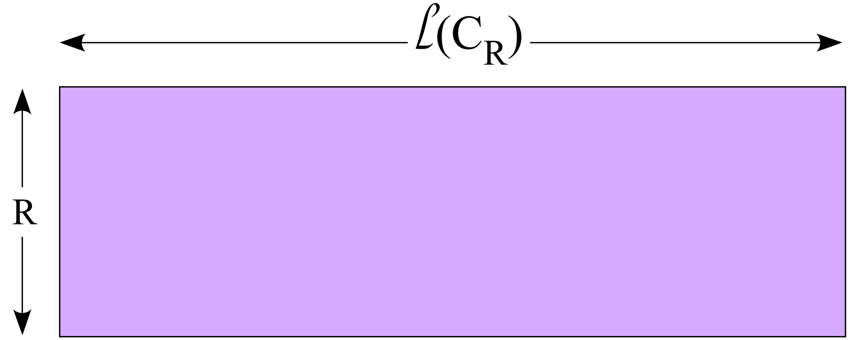


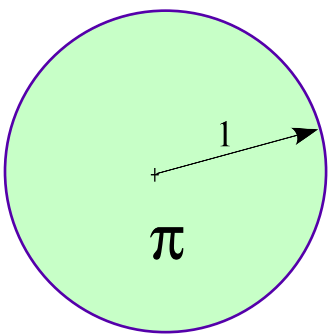
$$\mathcal{A}(P_{4n}) = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \ell(P_{2n})$$



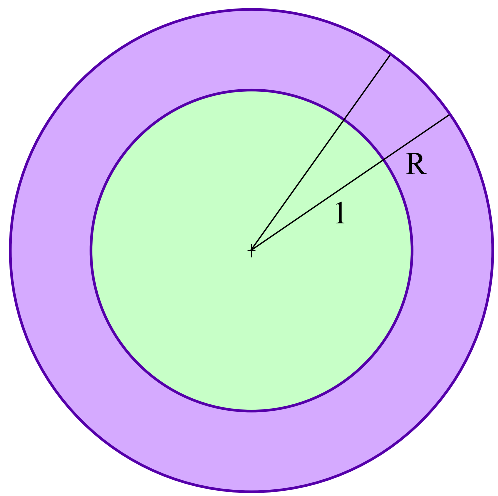
$$\mathcal{A}(D_R) = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \ell(C_R)$$







Définition de π

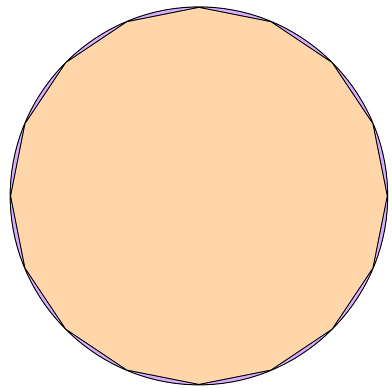


Conséquences :

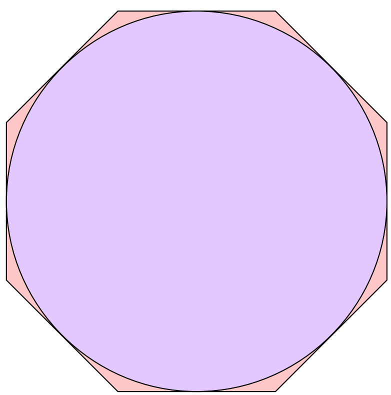
$$\mathcal{A}(D_R) = \pi \cdot R^2$$

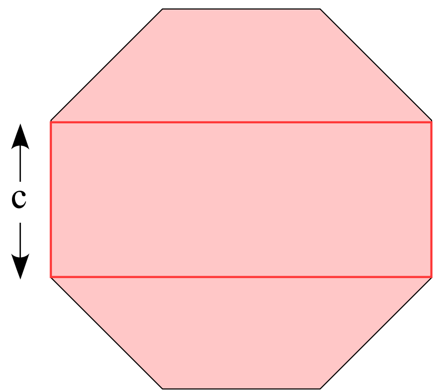
$$\ell(C_R) = 2\,\pi \cdot R$$

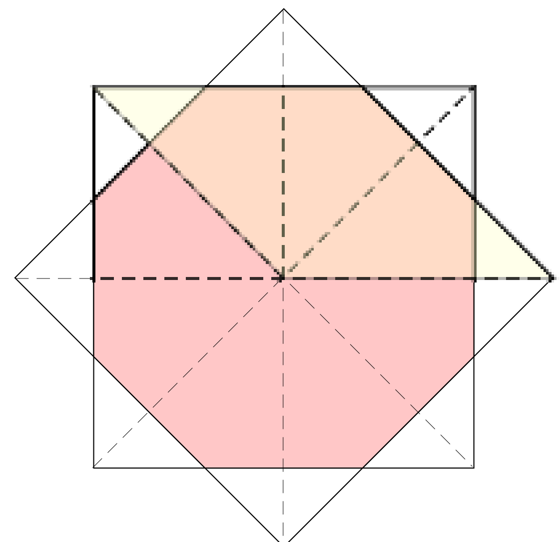
Encadrement de π



$3 < \pi$







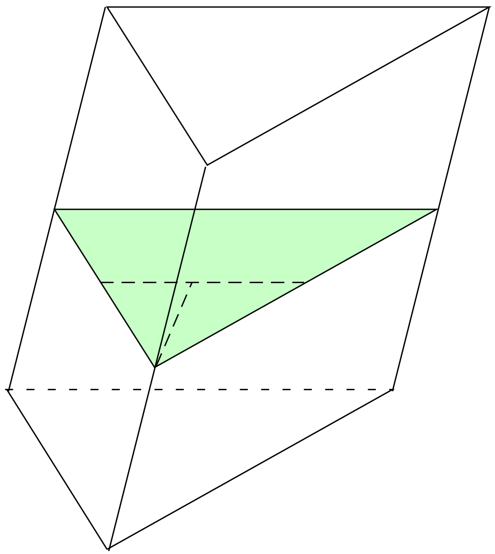
$$\mathcal{A}(P_8) = 2\cdot(2R\cdot c) = 8\cdot R^2(\sqrt{2}-1)$$

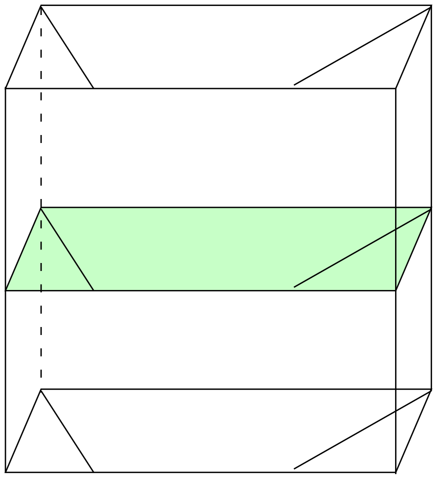
$$c = 2\cdot R\cdot(\sqrt{2}-1)$$

$$\boxed{3 < \pi < 3{,}36}$$

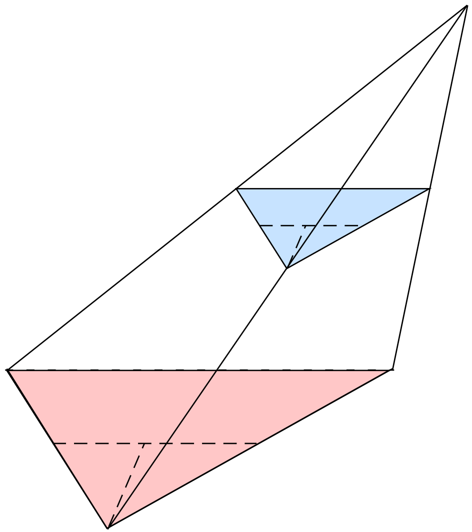
Aires et volumes

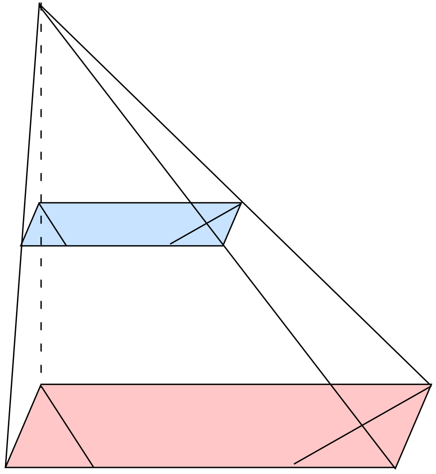
Deux prismes de même aire de base et même hauteur ont même volume





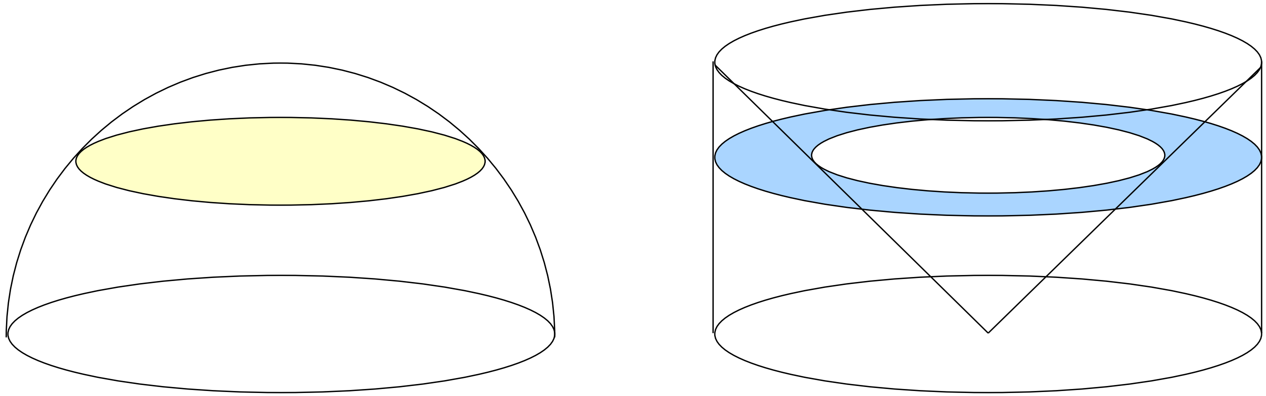
Deux pyramides de même aire de base et même hauteur ont même volume



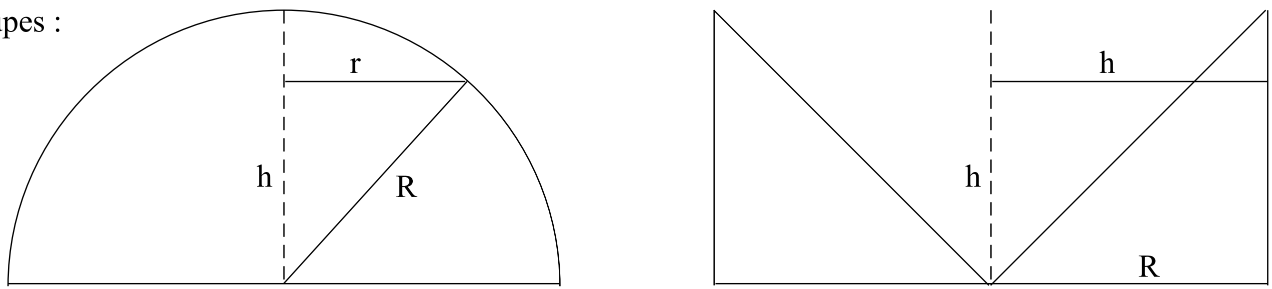


Volume d'une boule $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Les coupes, à même niveau, de la demi-boule et du cylindre creusé en cône de même rayon de base et même hauteur ont même aire



Coupes :



$$R^2 = h^2 + r^2 \qquad\qquad R^2 - h^2 = r^2$$

La demi-boule et le cylindre creusé en cône de même rayon de base et même hauteur ont même volume :

$$V' = \pi R^2 \times R - \frac{1}{3}\pi R^2 \times R = \frac{2}{3}\pi R^3$$