RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ 2017
Finale du mardi 11 avril 2017

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.
Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.
La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

---

1 – La magie des cartes

Louis aime bien faire des tours de magie avec des cartes à ses amis.
Chaque carte a une valeur : 1 pour l'as, 2 pour le deux, ... , 10 pour le 10, 11 pour le valet, 12 pour la dame, 13 pour le roi.
Chaque couleur a une valeur : 6 aux trèfles, 7 aux carreaux, 8 aux cœurs, 9 aux piques.
Son ami Pierre choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes sans que Louis la voie.

Louis lui demande de multiplier par 2 la valeur de sa carte et d'ajouter 1, puis multiplier par 5 le résultat.
Ensuite, il lui demande d'ajouter au résultat trouvé la valeur de la couleur de sa carte.
Avec le résultat donné par Pierre, Louis soustrait mentalement 5 et lui annonce la carte choisie.

Pierre s'exclame : "Je trouve 123" ! Quelle était la carte choisie ?
Expliquez le principe de ce tour de magie.

Eléments de solution

a.) 123 - 5 = 118. 11 correspond à un valet et 8 correspond aux cœurs. Donc l'ami de Louis avait tiré le valet de cœur.

b.) Soit n la valeur de la carte, n est un nombre entier compris entre 1 et 13.
Les calculs demandés sont 5(2n + 1), ce qui correspond à 10n + 5.
Soit c la valeur de la couleur, c est égal à 6, 7, 8 ou 9.
10n + 5 + c - 5 = 10n + c, ce qui correspond à un nombre de deux ou trois chiffres dont les unités correspondent à la valeur de la couleur et dont le nombre de dizaines correspond à la valeur de la carte.

2 – Immocash

Vincent souhaite investir dans l'achat d'un appartement.
Il se voit proposer par l'agence immobilière Immocash deux offres proches de son budget :
Appartement A : dans une résidence neuve, au prix de 160 000 €.
Appartement B : dans une résidence construite il y a 15 ans, au prix de 148 000 €

La situation est la suivante :

- Le prix de l'appartement A n'est pas négociable. Le propriétaire de l'appartement B est ouvert à une négociation et attend une offre de Vincent, qu'il pourra accepter ou refuser.
- Les frais de notaire (droits de mutation + honoraires du notaire) sont plus élevés dans l'ancien que dans le neuf.
  Ils représentent 2,5% du prix pour l'appartement A et 7,5% du prix pour l'appartement B.
- Vincent a une préférence pour l'appartement B, mais il devra effectuer dans cet appartement 10 000 € de travaux (peinture et rénovation de la salle de bains vétuste).

Quelle offre maximale (*approchée au millier d'euros*) Vincent doit-il faire au propriétaire de l'appartement B pour qu'il lui revienne au final moins cher que l'appartement A ?

Eléments de solution

Le coût final de l'appartement A est 164 000 euros.
En effet, l'application des frais de notaire, monte le prix à $160000 \times 1,025$, soit 164 000 €.

Calculons le coût final de l'appartement B
Pour un prix de vente initial P, l'application des frais de notaire, monte le prix à P x 1,075
D'autre part, en tenant compte des travaux, le prix final est alors P' = P x 1,075 + 10 000
L'appartement B sera meilleur marché que le A pour Vincent si on a P' < 164 000
P' < 164000 équivaut à 1,075P < 154 000 soit P < 154 000/1,075
$154000/1,075 \approx 143256$

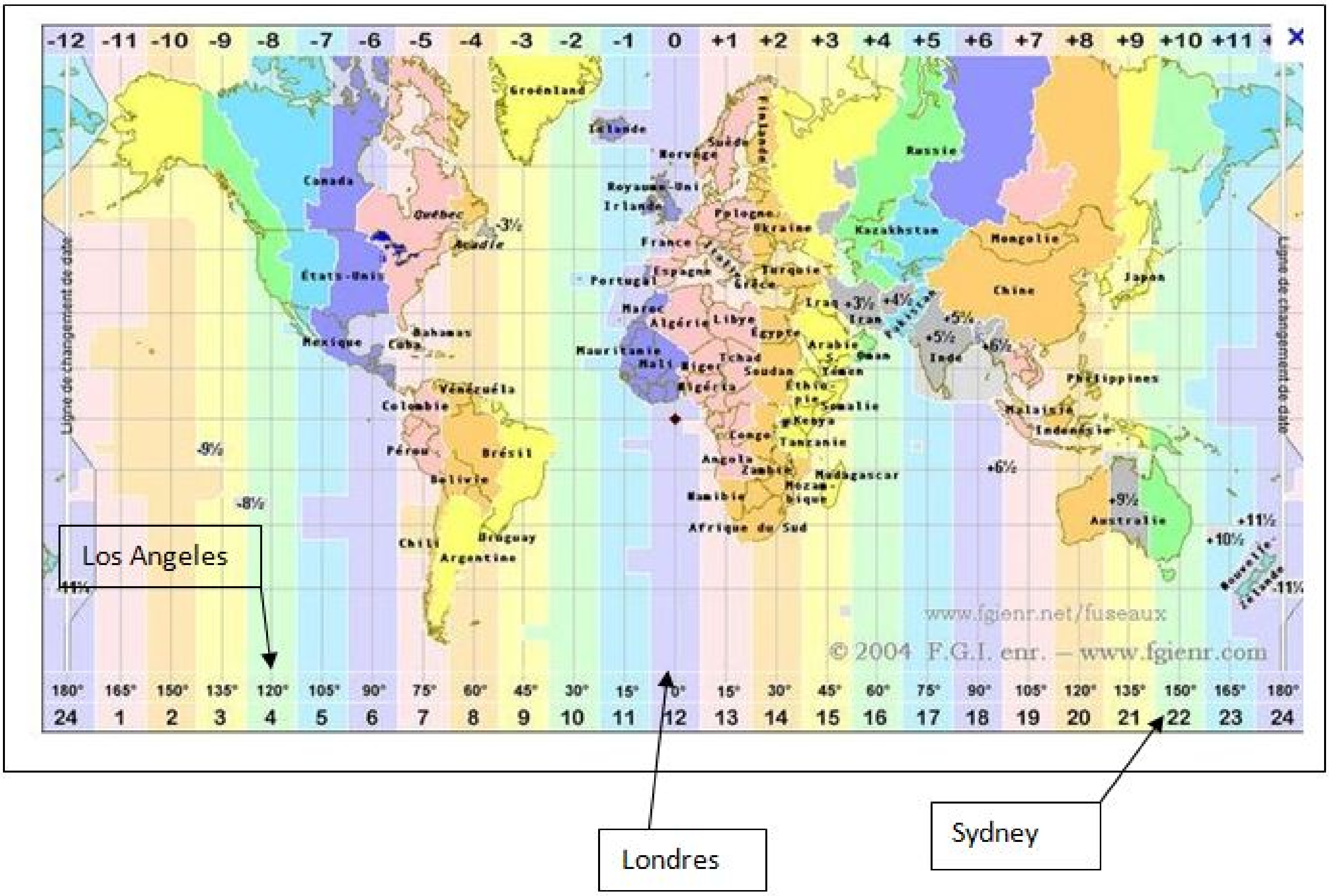
Vincent doit donc proposer au propriétaire de l'appartement B, un prix maximum de 143000 €

3 – Clément et Philéas

Clément vient d'achever la lecture du "Tour du monde en 80 jours" de Jules Verne. Philéas Fogg, le héros londonien de ce roman paru en 1872 réussit cet exploit en utilisant principalement le train et le bateau. Clément surfe sur Internet et, en quelques clics, planifie un tour du monde virtuel en avion présenté dans le tableau suivant :

Trajets	**Date de départ** **Heure locale**	**Date d'arrivée** **Heure locale**	**Durée du vol**	**Nombre d'escales**
Londres-Los Angeles	Vendredi 2 11h30	Vendredi 2 14h30		0
Los Angeles-Sydney	Vendredi 2 21h35		16 h	1
Sydney-Londres	Dimanche 4 18h45		27h45	2

On rappelle que la Terre est divisée en 24 fuseaux horaires. Dans la carte ci-dessous, les positions des 3 villes concernées ont été indiquées. De plus, le décalage horaire entre l'heure de Londres, ou plutôt de son quartier de Greenwich (dite heure GMT) et chaque fuseau horaire, est indiqué en haut de la carte.



Remplir le tableau ci-dessus et en déduire la durée du tour du monde virtuel de Clément.

Eléments de solution

Le décalage horaire indiqué sur la ligne supérieure est la différence entre l'heure locale considérée et l'heure du fuseau de Greenwich(ou Londres). On écrira : D = HL - HG

Vol Londres-Los Angeles

Il arrive à HL = 14h30 donc HG = HL - D = 14h30 - (-8) = 22h30

Il est 22h30 à Londres lorsque l'avion arrive, la durée du vol est 22h30-11h30, soit 11 heures.

Vol Los Angeles-Sydney

Le vol dure 16 heures, donc quand il arrive, il est à Los Angeles 13h35 le samedi 3 car 21h35 + 2h25 = 24h et 16h = 2h25 +13h35

Il est alors 13h35 + 8 = 21h35 à Londres ce même samedi 3 et donc comme 21h35 = HL - 10, il est à Sydney 7h35 le dimanche 4 puisque 21h35 = 24h + 7h35

Vol Sydney-Londres

Le vol dure 27h45 donc quand il arrive, il est à Sydney 22h30 le lundi 5 puisque 18h45 +27h45=46h30 = 24 + 22h30

Il est alors 22h30 - 10h, soit 12h30 le lundi 5 lorsque l'avion atterrit à Londres

Trajets	**Date de départ Heure locale**	**Date d'arrivée Heure locale**	**Durée du vol**	**Nombre d'escales**
Londres-Los Angeles	Vendredi 2 11h30	Vendredi 2 14h30	**11h**	0
Los Angeles-Sydney	Vendredi 2 21h35	**Dimanche 4 7h35**	16 h	1
Sydney-Londres	Dimanche 4 18h45	**Lundi 5 12h30**	27h45	2

La durée du tour du monde virtuel de Clément est donc de :
vendredi 2 : 12h30
samedi 3 : 24h
dimanche 4 : 24h
Lundi 5 : 12h30
Soit au total 73h

Le tour du monde de Clément a une durée de 73 heures

4 – Vroum ! ! !

La circulation automobile dans le Grand Besançon ne s'arrange pas.
En quittant la ville à 17h après sa réunion de travail, Sébastien a pu le vérifier à l'aide de l'ordinateur de bord de son cabriolet.

- Après 30 minutes, sa vitesse moyenne sur la première partie du parcours n'était que de 30 km/h.
- Après 45 minutes, elle était sur les deux premières parties du parcours de 45 km/h.
- La dernière partie du trajet emprunte partiellement une voie rapide et ne traverse aucune agglomération. Cela permet à Sébastien d'arriver à la maison 60 minutes après son départ en ayant parcouru exactement 60 km.

Quelle a été sa vitesse moyenne sur la deuxième partie du parcours ?
Quelle a été sa vitesse moyenne sur la dernière partie du parcours ?

Eléments de solution

Le trajet est scindé en trois secteurs

Nous utiliserons la formule Distance = vitesse moyenne x temps avec les distances en km, les temps en heures et les vitesses en km/h

Secteur 1 :
V =30 et t = 1/2 = 0,5 donc d = 30 x 0.5 soit d = 15 Le premier secteur est long de 15 km

Secteurs 1 et 2 :
V = 45 et t = 3/4 = 0,75 donc d = 45 x 0,75 soit d = 33,75 Les deux premiers secteurs représentent une distance de 33,75 km Le second secteur est long de 18,75 km

Le temps de parcours de ce second secteur est de 15 minutes soit 0.25 heure
la vitesse moyenne sur ce second secteur est de 18,75/0.25, soit 75 km/h

Secteurs 1, 2 et 3 :
Le troisième secteur est long de 60 - 33,75, soit 26,25 km
Il a été parcouru en 60 - 45 soit 15 minutes ou 0,25 heure
La vitesse moyenne sur le troisième secteur est alors de 26,25 /0,25, soit 105 km/h

5 – Mondial Foot

Durant cette compétition, l'équipe de France faisait partie du groupe A avec le Danemark, l'Uruguay et le Sénégal. On rappelle que les équipes de chaque groupe se rencontrent toutes une fois et qu'un match gagné vaut 3 points, un match nul vaut 1 point et un match perdu 0 point.

Le classement du groupe a été le suivant :

1er Danemark 2ème Sénégal 3ème Uruguay 4ème France.

Les 4 équipes avaient un nombre de points différents et le nombre total de points attribués a été 15.

En expliquant votre démarche, pourriez-vous trouver :

- **Le nombre de matchs nuls ?**
- **Le nombre de points de chaque équipe, sachant que les deux équipes classées en tête ont fini invaincues ?**

Eléments de solution

1.) 3 points sont attribués pour un match se terminant par une victoire (3 pour l'équipe gagnante et 0 pour la perdante). 2 points sont attribués pour un match nul (1 point pour chaque équipe).
Chaque équipe rencontrant les 3 autres, il y a eu 6 matchs disputés dans le groupe.

Il y a eu trois matchs nuls dans le groupe

2.) Le Danemark est invaincu et termine premier. Il a donc soit 9 points (3 victoires), soit 7 points (2 victoires, 1 nul), soit 5 points (1 victoire, 2 nuls)

Il ne peut avoir 5 points car $5 + 4 + 3 + 2 < 15$ et il ne peut avoir 9 points car si le Danemark gagne ses 3 matchs, les 3 autres matchs se terminent par des parties nulles et les 3 autres équipes ont 2 points.

Le Danemark a donc 7 points, soit deux victoires et un match nul

Le total de 15 avec 4 nombres différents peut donc s'obtenir dans les deux cas :

a) $7 + 5 + 2 + 1$ b) $7 + 4 + 3 + 1$

Dans les deux cas, la France a donc perdu 2 matchs et fait un match nul.

Le Danemark a gagné deux matchs ; le troisième match gagné l'a donc été par le Sénégal classé deuxième car le Sénégal ne peut avoir 4 ou 5 points avec seulement des matchs nuls.

L'Uruguay n'a donc pas gagné de match et ne peut donc avoir 3 points. Le cas b) est impossible

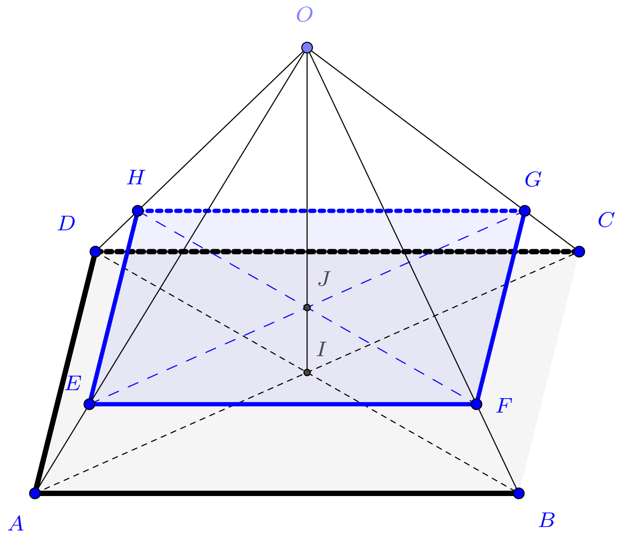
Le classement est donc :
1) Danemark 7 points
2) Sénégal 5 points
3) Uruguay 2 points
4) France 1 point

6 – Gâteau de Solenne

Pour son anniversaire Solenne souhaite un gâteau au chocolat.
Elle le désire en forme de pyramide dont la base est un carré de côté de 20 cm et dont les faces sont des triangles équilatéraux.
Afin de le garnir de crème à la vanille, elle veut le partager en le coupant horizontalement et obtenir ainsi deux morceaux de même volume.

Indiquez à Solenne à quel niveau elle doit couper son gâteau.

Eléments de solution



$ABCD$ est un carré de centre I et de côté $AB = 20$ cm.
ABO, BCO, CDO, et DAO sont des triangles équilatéraux de côtés 20 cm.
$EFGH$ est un carré de centre J.

Le volume de la grande pyramide est $V_{OABCD} = \dfrac{1}{3} \times AB^2 \times OI$.

Le volume de la petite pyramide est $V_{OEFGH} = \dfrac{1}{3} \times EF^2 \times OJ$.

Condition imposée : $V_{OEFGH} = \dfrac{1}{2} \times V_{OABCD}$.

Posons $k = \dfrac{EF}{AB}$. On a également (par homothétie) $k = \dfrac{OE}{OA}$.

La condition imposée peut alors s'écrire : $\dfrac{1}{3} \times k^2 \times AB^2 \times k \times OI = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} \times AB^2 \times OI$.

Soit : $k^3 = \dfrac{1}{2}$.

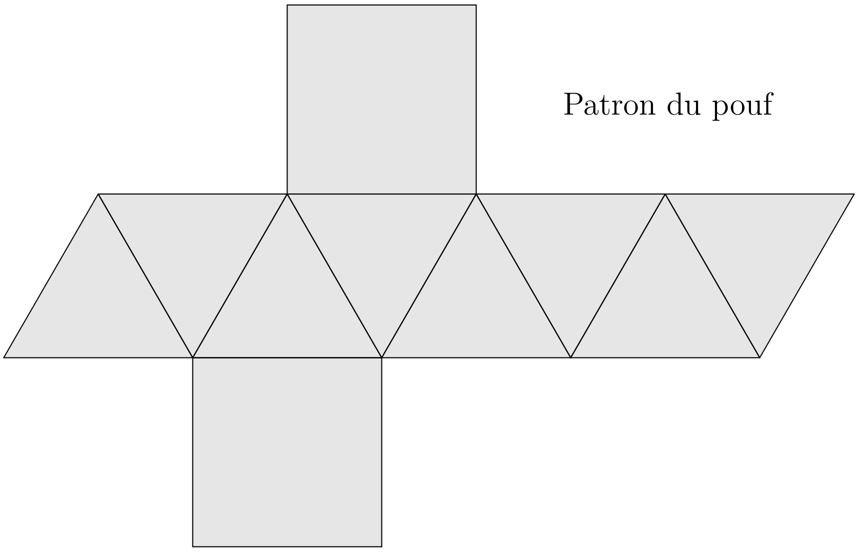
On trouve alors $k = \sqrt[3]{0.5} \approx 0,793$.

Et donc $OE \approx 15,8$ cm. Solenne doit couper son gâteau horizontalement à peu près au 4/5 à partir du sommet.

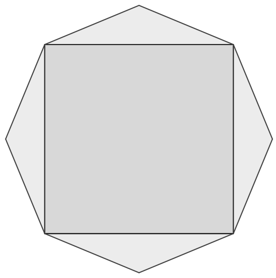
7 – Pouf carré

Voici le patron d'un pouf et une vue de dessus en réduction.
Les faces du dessus et du dessous sont des carrés de côté 50 cm, et les faces latérales sont des triangles équilatéraux. La vue de dessus est un octogone régulier.

Patron du pouf

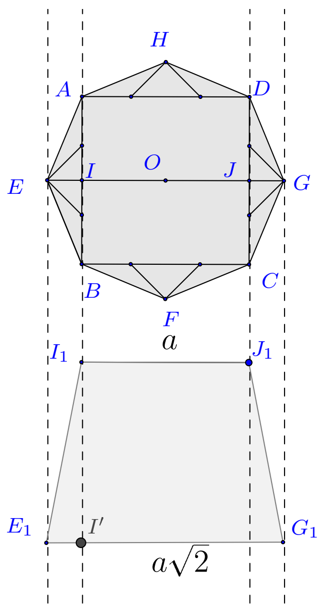


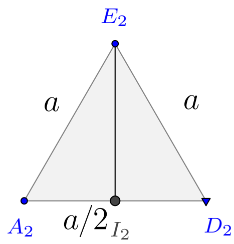
Vue de dessus du pouf



Calculez la hauteur de ce pouf lorsqu'il est posé sur une face carrée.

Eléments de solution





$EI^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4}.$ donc $EI = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$EI' = a\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{a}{2}.$

Dans le triangle rectangle OII'

on a : $II'^2 + I'E^2 = EI^2$
d'où : $II'^2 = EI^2 - I'E^2$
et donc $\left(a\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(a\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$

d'où $II'^2 = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}.$

et $II' = a\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}.$

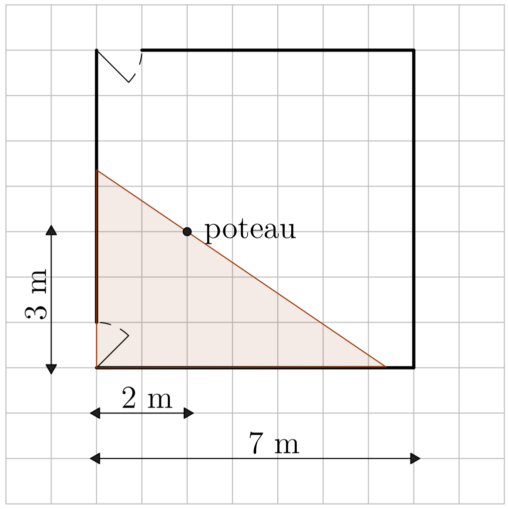
Comme $a = 50$ cm, on a : $II' = 50\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \approx 42,04$ cm.

Conclusion : la hauteur de ce pouf est environ 42 cm.

8 – Chacun sa chambre

Théo avait une grande chambre carrée de 7 mètres de côté, mais avec la naissance de son petit frère Georges, elle va être partagée par une cloison.
La cloison doit être rectiligne et doit passer par un poteau déjà présent dans sa chambre.
Cette cloison sera apposée sur deux côtés consécutifs de sa chambre. (voir figure)

Théo souhaite que la surface de sa chambre soit la plus grande possible. Quelle proposition va-t-il faire à ses parents ?



Eléments de solution

On se place dans "le repère naturel de la chambre".

Dans ce repère le poteau a pour coordonnées (2, 3), La cloison est modélisée par la droite d'équation y = mx + p, elle passe par le poteau de coordonnées donc 3 = 2m + p.

On notera que p est compris entre 4,2 et 7 pour que la cloison existe.

Si on appelle A et B les points d'intersection respectifs de la cloison avec les axes des coordonnées, on obtient A(0, p) et B(-p/m, 0).

On obtient alors la surface de la chambre (côté Georges) :$p^2/(p-3)$

On peut ensuite utiliser la table de la calculatrice (courbe en mode trace)ou un tableur pour constater que le minimum est atteint en pour une valeur de p proche de 6...

Preuve de la minimalité : Si l'aire $\mathcal{A}(p)$ est minimale pour $p = 6$ alors $\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}(6)$ doit être positif pour tout p. Calculons :

$\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}(6) = \dfrac{p^2}{p-3} - \dfrac{36}{3} = \dfrac{p^2}{p-3} - 12 = \dfrac{p^2 - 12p + 36}{p-3} = \dfrac{(p-6)^2}{p-3}$ qui est bien toujours positif pour p compris entre 4,2 et 7 (ou nul si p=6).

Méthode géométrique.

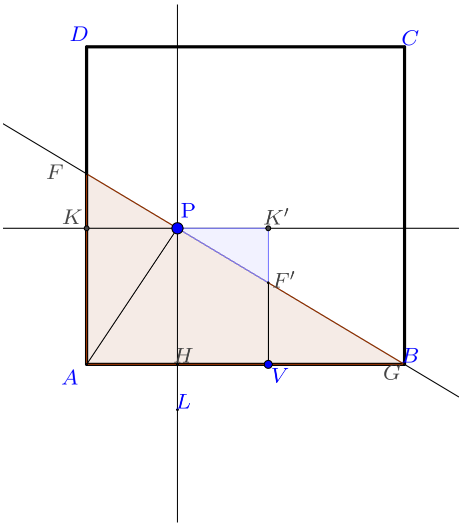


figure 1 : p=4,2

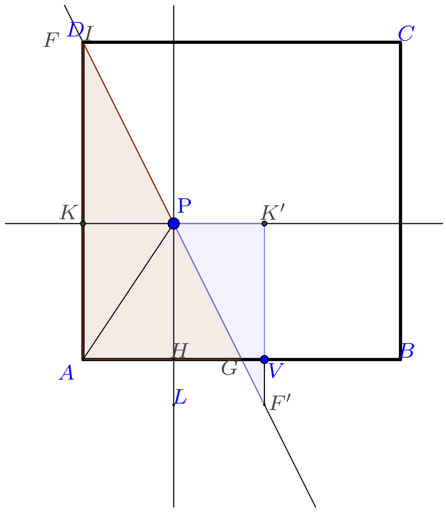
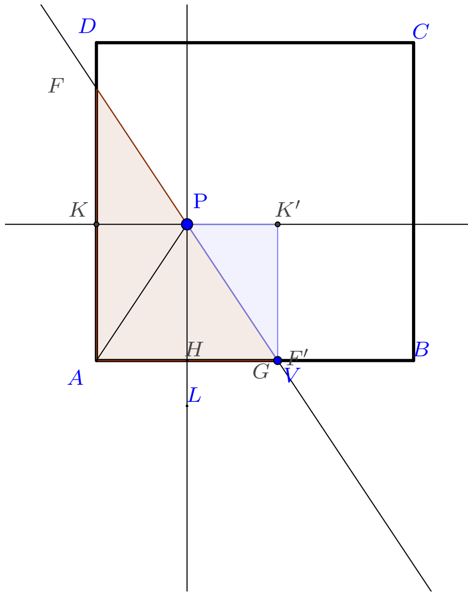


figure 2 : p=7



solution : p=6

En plaçant la cloison aux positions extrèmes de la cloison pour lesquelles p = 4,2 (figure 1) et p = 7 (figure 2), on peut montrer que l'aire de la petite chambre peut se décomposer en la somme des aires du rectangle AKK'V et du triangle VBF' ou VGF'.

On peut conjecturer alors que s'il existe une position telle que l'aire des triangles est nulle, la chambre aura pour aire celle du rectangle et ce sera un minimum.
Or, cette position est obtenue quand la cloison passe par le point V. (V est le point obtenu en traçant la perpendiculaire à la droite (KP) passant par le symétrique K' de K par rapport à P.

9 – Triangles d'or et triangle d'argent

Laura, passionnée par le nombre d'or a découvert que c'est le nombre positif qui, élevé au carré, est égal à lui-même plus 1. On le note souvent Φ (*qui se lit phi*).
Elle a aussi découvert qu'un triangle est d'or s'il est isocèle, que le rapport de deux de ses côtés est égal au nombre d'or et qu'il ne possède pas d'angle obtus.
S'il a la même propriété mais qu'il possède un angle obtus alors on dit que c'est un triangle d'argent.
Laura a réussi à confectionner parfaitement deux triangles d'or (2 côtés de mesure Φ et un côté de mesure 1) et un triangle d'argent (2 côtés de mesure 1 et un côté de mesure Φ).
En assemblant ces trois morceaux, Laura a bien l'impression d'obtenir un nouveau triangle d'or.

Sur la fiche réponse construisez le triangle obtenu par Laura.
Est-il d'or comme elle l'imagine ?

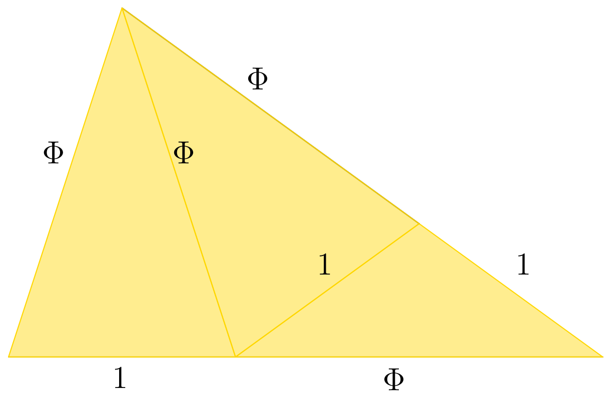
Eléments de solution

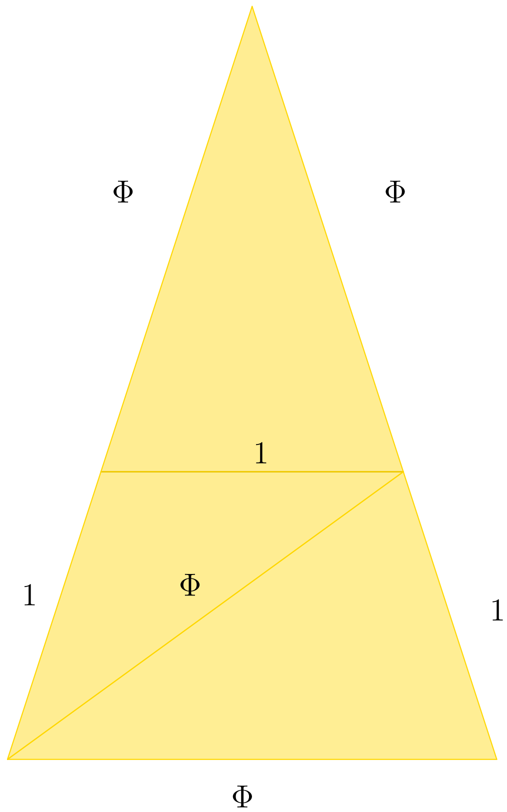
Pour ces figures on utilise $\Phi^2 = \Phi + 1$

donc $\quad \Phi = \dfrac{\Phi + 1}{\Phi}$.

Deux côtés mesurent $\Phi + 1$ et le troisème côté mesure Φ.

Ce sont bien deux triangles d'or.


Φ
Φ
Φ
1
1
1
Φ


Φ
Φ
1
1
Φ
1
Φ