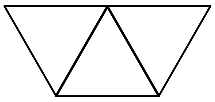
Eléments de solution de l'épreuve de qualification du RMFC 2006-2007

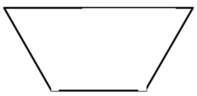
1 - Table hexagonale

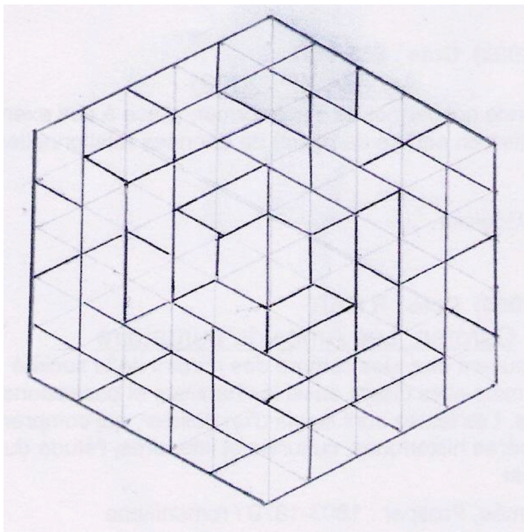
La juxtaposition de trois triangles équilatéraux (voir ci-dessous), dont les côtés mesurent 1 cm permet d'obtenir un trapèze isocèle dont les côtés mesurent respectivement 1 ; 1 ; 1 et 2 cm.
A l'échelle 1/50 ^{e}, une longueur de 50 cm est représentée par un segment de 1 cm
Ce trapèze, ainsi tracé, peut servir de trapèze gabarit. Inversement, il est possible de tracer au compas un trapèze de côtés 1 ; 1 ; 1 et 2.
Ainsi, on peut tracer une grande table hexagonale ayant les propriétés des hexagones réguliers de côté 1, puis 2, puis 3 … jusqu'à épuisement du nombre des tables trapèzes disponibles.

La plus grande table hexagonale est de côté 5, car toutes les tables disponibles ont été utilisées.

Il était également possible d'utiliser un réseau de triangles équilatéraux de côté 1 cm.







«Les dessins ne sont pas à l'échelle »

Ce réseau peut-être obtenu à partir des sommets d'un hexagone régulier, en traçant des familles de droites parallèles bien choisies

2 - Scions

Pour obtenir des petits cubes de même dimension, Susana coupe le cube dans le sens de la hauteur, de la longueur et de la largeur. Le nombre de coupes doit être un multiple de 3.
45 = 15 x 3 donc chaque arête subit 15 coupes.
Sur chaque arête du cube initial, on peut compter 16 petits cubes, il y a donc un total de 16^3 cubes pour former le grand cube initial.
Les cubes non colorés forment un cube intérieur avec une arête de 14 petits cubes. Le cube intérieur contient donc 14^3 petits cubes.

Le nombre de cubes colorés est donc de $16^3 - 14^3$ soit 1352

3 - Black jack

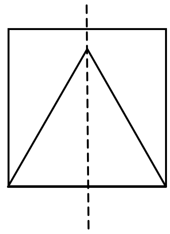
Nous remarquons que les chiffres 0, 1, 2, 5, 8 sont invariants par rotation de 180°.
D'autre part, les chiffres 6 et 9 s'échangent par cette même rotation de 180°.
Le chiffre 0 n'apparaîtra pas dans les cartes doubles car il ne peut figurer qu'en chiffre des unités.
Il y a donc 6 chiffres utilisables

Avec ces 6 chiffres utiles cités, on peut écrire 6 x 6 nombres à deux chiffres. Il y a donc au maximum 36 cartes doubles.
Il y a 6 cartes parmi ces 36 qui sont invariantes par rotation de 180° et qui ne peuvent pas être considérées comme cartes doubles : 11, 22, 55, 69, 88, 96.
Nous avons donc 30 cartes doubles parmi les 90 que compte le jeu.

4 - Cube et triangles équilatéraux

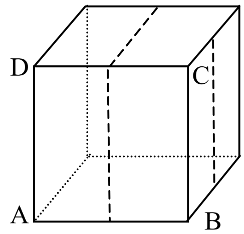
- Construction des hauteurs

Les hauteurs d'un triangle équilatéral sont ses médiatrices.
La hauteur (en pointillés dans la figure ci-contre) est donc aussi la médiatrice de deux côtés du carré
Pour la tracer, il suffit donc de construire les milieux de ces côtés.



Le tracé des trois hauteurs peut se faire après la construction des milieux de cinq segments, chaque milieu étant obtenu par exemple en construisant la médiatrice du segment.

Sur la figure ci-contre, la construction des médiatrices n'apparaît pas pour une meilleure visibilité. La figure est réduite

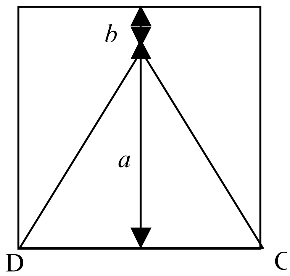


- Construction des sommets

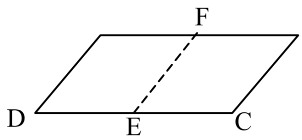
Sur les faces avant et de droite, le sommet peut être déterminé par simple report de longueur.

Sur la face du dessus, le sommet du triangle doit partager le segment joignant les milieux de deux côtés du carré dans les mêmes proportions que sur le patron.

Face du dessus sur le patron



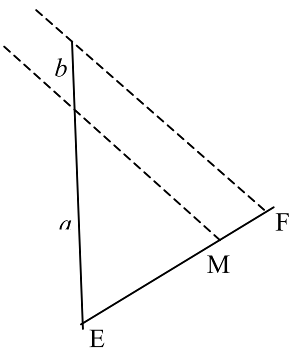
Face du dessus en perspective cavalière



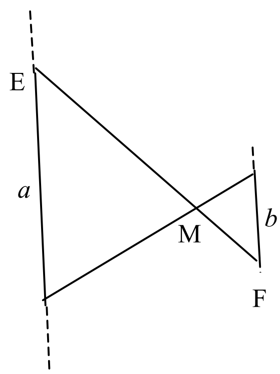
IL s'agit de placer le point M sur le segment $[EF]$ tel que : $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{a}{b}$

Voici deux constructions possibles utilisant la propriété de Thalès. Les droites en pointillés sont parallèles.

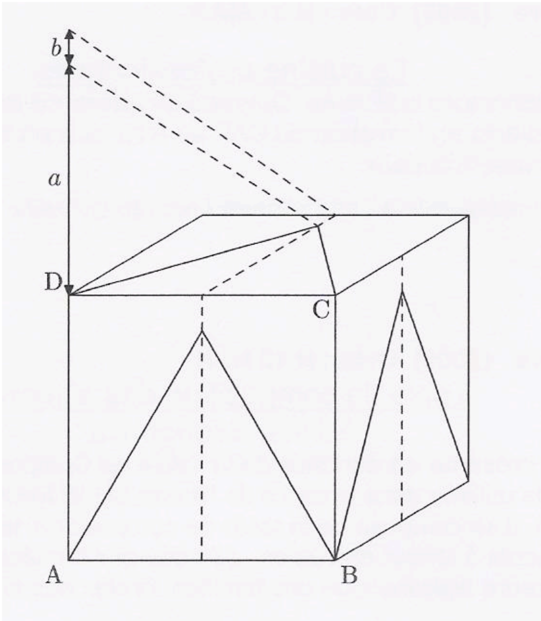
Configuration classique



Configuration « papillon »



La construction finale



5 - Le défi de Mylène

Avec $+$, $-$ et $\times$, on obtient 7 résultats différents possibles.

$n + n - n \times n = 2n - n^2$
$n + (n - n) \times n = n$
$n \times n - n + n = n^2$
$(n + n) \times n - n = 2n^2 - n$
$n \times n - (n + n) = n^2 - 2n$
$n - (n + n \times n) = -n^2$
$n - (n + n) \times n = n - 2n^2$

Avec $\div$, $+$ et $\times$, on obtient 7 résultats différents possibles.

$n + n \times n \div n = 2n$
$n \times n + n \div n = n^2 + 1$
$(n + n \times n) \div n = n + 1$
$(n + n \div n) \times n = n^2 + n$
$n \div (n + n) \times n = \frac{1}{2}n$
$n \div (n + n \times n) = \frac{1}{1+n}$
$n + n \div (n \times n) = n + \frac{1}{n}$

Avec $\div$, $+$ et $-$, on obtient 8 résultats différents possibles

$n + n - n \div n = 2n - 1$
$n \div n - n + n = 1$
$(n + n) \div n - n = 2 - n$
$n \div n - (n + n) = 1 - 2n$
$n - (n + n \div n) = -1$
$n - (n + n) \div n = n - 2$
$n - n \div (n + n) = n - \frac{1}{2}$
$n \div (n + n) - n = \frac{1}{2} - n$

Avec $\div$, $-$ et $\times$, on obtient 11 résultats différents possibles.

$n - n \times n \div n = 0$
$n \times n - n \div n = n^2 - 1$
$n \div n - n \times n = 1 - n^2$
$(n - n \div n) \times n = n^2 - n$
$(n \div n - n) \times n = n - n^2$
$(n \times n - n) \div n = n - 1$
$(n - n \times n) \div n = 1 - n$
$n \div (n - n \times n) = \frac{1}{1-n}$
$n \div (n \times n - n) = \frac{1}{n-1}$
$n - n \div (n \times n) = n - \frac{1}{n}$
$n \div (n \times n) - n = \frac{1}{n} - n$

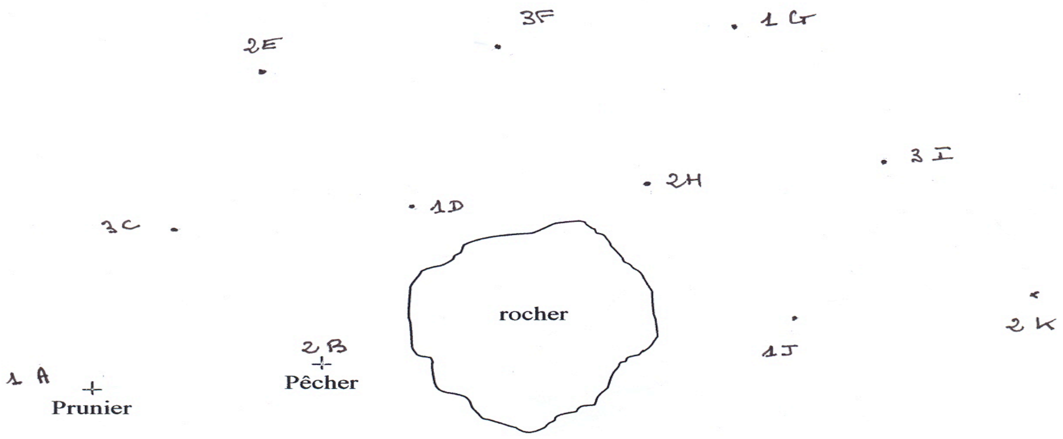
On trouve donc 33 résultats différents.

9 peuvent être écrits sans parenthèses, 24 nécessitent une paire de parenthèses exactement.

6 - Plantation

Prunier et pêcher étant distants de quatre mètres, on trace quatre marques rouges sur la ficelle distantes de quatre mètres. La ficelle utilisée doit être longue d'au moins douze mètres. Ces trois morceaux de quatre mètres permettent de tracer des triangles équilatéraux de côté quatre comme l'indique la figure ci-dessous. Les piquets sont numérotés 1 ; 2 ; 3.
Ce réseau de triangles équilatéraux permet d'obtenir des sommets de losanges, donc des droites parallèles notées (AB), (CD), (EF) …
Les points A, B, J, K sont alignés et de plus CI = 12, d'où BK = 12. En pliant en deux un segment de quatre mètres de la ficelle, on peut obtenir le milieu L de [IK]
On a alors BL = 10

L est l'emplacement où planter le pommier.



7 - Course contre la montre

L'araignée se déplace à la vitesse de 0,12 km.h $^{-1}$ ou $\frac{120}{3600} = \frac{1}{30}$ m.s $^{-1}$.

Elle possède 63 s pour attraper la mouche.

Il lui faut donc trouver un parcours mesurant moins de $63 \times \frac{1}{30}$ soit 2,10 m.

Dans les figures ci-dessous, M et N désignent respectivement l'araignée et la mouche.

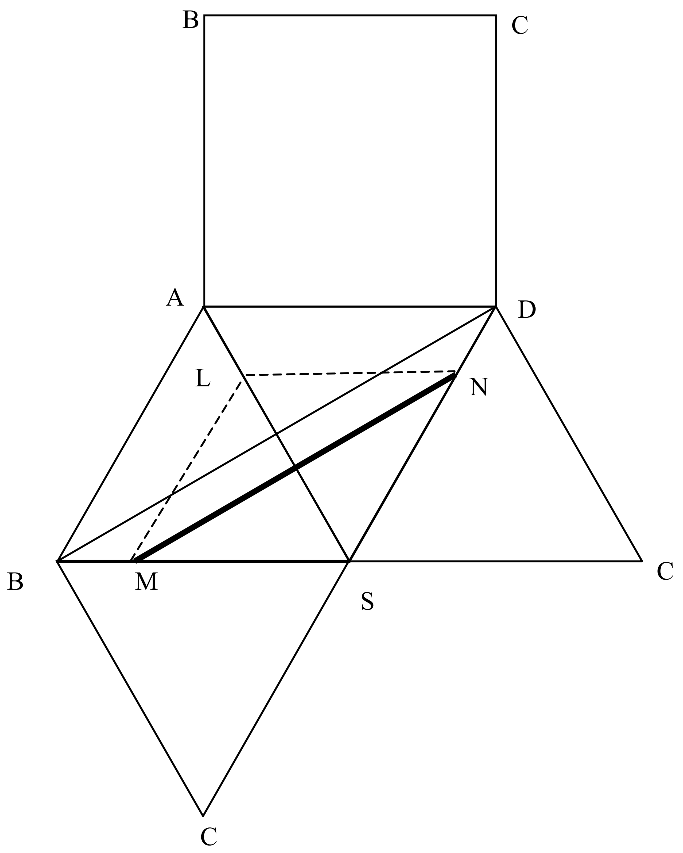
Différents trajets sont possibles :

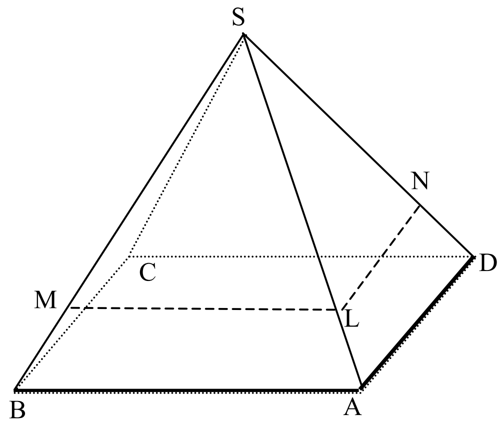
★ Suivre les arêtes de la pyramide en passant par le sommet : ([MS] puis [SN] sur le patron ci-dessous)
Dans ce cas la longueur *d* du parcours représente 1,2 x 2 soit 2,40 m et la mouche est sauve.

★ Prendre un chemin constitué successivement de deux segments parallèles aux arêtes de la base de la pyramide. ([ML] puis [LN] sur le patron et la figure ci-dessous.)
ABS et ASD sont des triangles équilatéraux, donc SML et SNL sont aussi des triangles équilatéraux.
Dans ce cas, la longueur *d* du parcours représente 1,2 x 2 soit 2,40 m et la mouche est encore sauve.

★ Le patron prouve que la trajectoire la plus courte joignant M et N est représentée par le segment [MN] (en gras sur le patron).
Dans le losange ADSB de côté 2 m, les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.
La petite diagonale est un côté du triangle équilatéral, la grande diagonale mesure donc $2\sqrt{3}$ m.
Le chemin emprunté par l'araignée étant parallèle à cette grande diagonale, il est facile de montrer à l'aide du théorème de Thalès que la longueur *d* du parcours représente $1{,}2\sqrt{3}$ m soit moins de 2,08 m.

<u>L'araignée mange donc la mouche.</u>





8 - Livraison

La première étape consiste à attribuer à chaque trajet sa durée de parcours à l'aide de la formule :

$temps = \dfrac{distance}{vitesse}$ (ou en utilisant la proportionnalité *distance/temps* quand la vitesse est fixée).

On obtient le tableau suivant :

Trajet	$A-C_4$	C_1-C_2	C_3-C_4	C_1-C_4	$A-C_1$	$A-C_2$	C_1-C_3	C_2-C_3
Durée (min)	6	20	10	18	7,2	12	8,4	24

On peut ensuite tenter d'inventorier toutes les possibilités de livraisons du boucher.

Par exemple, celles commençant par la ville C_1 :

$A-C_1-C_2-C_3-C_4-A$

$A-C_1-C_2-C_4-C_3-A$ (*)

$A-C_1-C_3-C_2-C_4-A$

$A-C_1-C_3-C_4-C_2-A$

$A-C_1-C_4-C_2-C_3-A$ (*)

$A-C_1-C_4-C_3-C_2-A$

Il y a 6 possibilités, on en trouve 6 autres commençant par $A-C_2$ et à nouveau 6 commençant par $A-C_4$. On ne compte pas celles qui commencent par $A-C_3$ car il est nécessaire de passer par une des trois autres villes pour relier A à C_3, ces trajets comportent donc une liaison supplémentaire par rapport aux autres.

Les trajets inverses ayant le même temps de parcours, on élimine de même ceux finissant par C_3-A (*).

Il ne reste donc que 12 possibilités (en fait, six, en ne comptant pas deux fois les trajets symétriques).

On peut également tenter d'optimiser les durées de trajets :

- Le trajet $C_1 - C_4$ est plus court si on passe par *A*, il n'est plus que de 13,2 min (7,2 + 6) au lieu de 18.
- Pour le trajet $C_1 - C_2$, de la même façon, on obtient 19,2 min (7,2 + 12) au lieu de 20.
- Les trajets en diagonale peuvent être optimisés également : 18 min pour $C_2 - C_4$ (en passant par *A*) et 15,6 min pour $A - C_3$ (7,2 + 8,4).

On essaie alors d'utiliser les combinaisons de villes nécessitant les temps de trajets les plus courts.
On élimine celles proposant la liaison $C_2 - C_3$ de 24 min qui est la plus longue à parcourir et ne peut être associée de façon optimale aux autres liaisons.

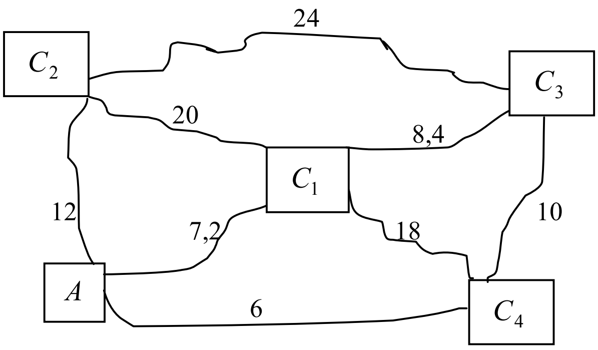
Il ne reste alors que 4 possibilités équivalentes :

$A - C_1 - C_3 - C_4 - C_2 - A$ (7,2 + 8,4 + 10 + 18 + 12 = 55,6)

$A - C_4 - C_3 - C_1 - C_2 - A$ (6 + 10 + 8,4 + 19,2 + 12 = 55,6) et leurs inverses.

Les temps de livraisons étant fixes, il suffit donc d'ajouter 75 min de livraison (15 + 20 + 30 + 10).
Le temps total est alors de 130,6 min (55,6 + 75) soit 2 h 10 min et 36 s.

<u>Monsieur Lecoq part de chez lui à 7 h , il sera donc de retour, au plus tôt, à 9 h 10 min 36 s.</u>



9 - Classe de Seconde

Il y a 13 filles dans la classe, ainsi tout groupe de 15 élèves contiendra au moins deux garçons. Nous avons donc la certitude d'avoir (au moins) deux garçons dans le groupe.
De la même façon, il y a 16 garçons dans la classe.

<u>La classe contient alors 29 élèves : 13 filles et 16 garçons</u>

Il y a 22 non rugbymen dans la classe, donc 7 rugbymen. Ainsi nous avons la certitude qu'un groupe de 24 élèves contiendra au moins deux rugbymen.
Il y a 22 élèves qui ne pratiquent pas la natation, donc 7 élèves qui font de la natation.
Parmi les sept rugbymen, il y a quatre nageurs. On en déduit que trois élèves pratiquent la natation sans jouer au rugby.
Par conséquent, dix élèves pratiquent le rugby ou la natation (ou les deux), donc

<u>la classe compte dix-neuf élèves ne pratiquant aucun sport.</u>

Remarque : Certaines filles pratiquant la natation, le groupe de sept nageurs peut être composé de deux façons différentes, à savoir :

- Soit de quatre garçons (rugbymen) et de trois filles.
- Soit de cinq garçons (dont quatre rugbymen) et de deux filles.